الإمتحانات الوطنية
مع التصحيح

طريقكم YOUR WAY
جمعية لتوجيه
وإرشاد شباب المستقبل

السنة الثانية باكالوريا

تم والحمد لله تجميع جميع الإمتحانات الوطنية
لمادة

الرياضيات

شعب

العلوم التجريبية

من دورة 2003 إلى دورة 2019

وسيتم نشر جميع التجميعات الأخرى لجميع المواد وذلك تحت إشراف جمعية طريقكم YOUR WAY المتخصصة في التوجيه المدرسي -أفاق ما بعد الباكالوريا - وذلك على الصفحة الخاصة بالجمعية على الفايسبوك

FACEBOOK.COM/ASSOCIATIONYOURWAY

☎ 06-62-84-94-52

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2003

مادة الرياضيات
العلوم التجريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجية بمسلكيها
مدة الانجاز 3h - المعامل 7

التمرين الأول : (2,0 ن)

1,00 ن **1** باستعمال مكاملة بالأجزاء، أحسب التكامل التالي : $I = \int_1^2 \ln x \, dx$

1,00 ن **2** أحسب التكامل التالي : $J = \int_0^{\ln 4} x\sqrt{e^x}\, dx$ (يمكنك وضع : $t = \sqrt{e^x}$)

التمرين الثاني : (2,5 ن)

يحتوي كيس على 6 كرات بيضاء تحمل الأعداد 0 و 0 و 0 و 1 و 1 و 2 و كرتين سوداوين تحملان العددين 0 و 1 (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس .

1,50 ن **1** أحسب احتمال كل من الحدثين A و B التاليين :
A : " للكرتين المسحوبتين نفس اللون " .
B : " جداء العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين منعدم " .

1,00 ن **2** نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بمجموع العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين ، حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

ليكن m عددا عقديا معلوما معياره $\sqrt{2}$ و عمدته α و نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة (E) المعرفة بما يلي : $(E) : mz^2 - 2z + \bar{m} = 0$.
($\bar{m}$ هو مرافق m و $|m| = \sqrt{m\bar{m}}$)

1,00 ن **1** بين أن حلي المعادلة (E) هما : $z' = \dfrac{1+i}{m}$ و $z'' = \dfrac{1-i}{m}$

1,50 ن **2** أكتب كل من z' و z'' و $\dfrac{z'}{z''}$ على الشكل المثلثي .

1,00 ن **3** في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط : A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : z' و z'' و $(z' + z'')$. بين أن الرباعي $\mathcal{O}ACB$ مربع .

التمرين الرابع : (2,0 ن)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ، نعتبر النقطة $A(2,0,2)$ و المستوى $(\mathcal{P})$ ذو المعادلة : $x + y - z - 3 = 0$.

0,50 ن **1** حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من A و العمودي على $(\mathcal{P})$

0,50 ن **2** حدد احداثيات B نقطة تقاطع المستقيم (D) و المستوى $(\mathcal{P})$.

3 نعتبر الفلكة $(\mathcal{S})$ التي مركزها A و التي تقطع المستوى $(\mathcal{P})$ وفق الدائرة التي مركزها B و شعاعها 2 .

0,50 ن — **3 أ** حدد شعاع الفلكة $(\mathcal{S})$.

0,50 ن — **3 ب** أكتب معادلة ديكارتية للفلكة $(\mathcal{S})$.

التمرين الخامس : (10,0 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1-x^3) & ; \ x<0\\ 4x\sqrt{x}-3x^2 & ; \ x\geq 0\end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن — **1 أ** بين أن الدالة f متصلة في النقطة O .

1,00 ن — **1 ب** بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق في النقطة O (نذكر أن : $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$)

1,50 ن — **2** بين أن الدالة f تناقصية على المجالين $]-\infty\,;0]$ و $[1\,;\,+\infty[$ ، و تزايدية على المجال $[0;1]$

0,50 ن — **3 أ** أحسب النهايتين : $\lim\limits_{t\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{t\to+\infty} f(x)$.

0,50 ن — **3 ب** تحقق من أنه لكل $x<0$ لدينا : $\frac{f(x)}{x}=3\left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)+\frac{\ln(1-x^{-3})}{x}$

0,50 ن — **3 ج** أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathscr{C})$.

1,00 ن — **4** أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$.

5 ليكن h قصور الدالة f على المجال $]-\infty\,;0[$.

0,50 ن — **5 أ** بين أن h تقابل من المجال $]-\infty\,;0[$ نحو مجال J يجب تحديده .

1,00 ن — **5 ب** حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من المجال J .

1,00 ن — **6** نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases}u_{n+1}=4u_n\sqrt{u_n}-3(u_n)^2 \ ; \ (\forall n\in\mathbb{N})\\ u_0=\frac{4}{9}\end{cases}$$

(يمكنك فيما يلي استعمال نتائج دراسة الدالة f)

0,50 ن — **6 أ** بين بالترجع أن : $\frac{4}{9}\leq u_n\leq 1 \ ; \ (\forall n\in\mathbb{N})$

0,50 ن — **6 ب** بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية

1,00 ن — **6 ج** استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثم حدد نهايتها.

طريقكم YOUR WAY جمعية للتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

أجوبة امتحان الدورة العادية 2003

التمرين الأول :

1

$$\int_1^2 \ln x\,dx = \int_1^2 \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\ln x}_{v}\,dx$$

$$= [uv]_1^2 - \int_1^2 uv'\,dx$$

$$= [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 1\,dx$$

$$= [x\ln x]_1^2 - [x]_1^2$$

$$= 2\ln 2 - 1\underbrace{\ln 1}_{0} - (2-1)$$

$$= \boxed{2\ln 2 - 1}$$

2

نضع : $t = \sqrt{e^x}$ يعني : $t = e^{\frac{x}{2}}$

و منه : $x = 2\ln t$ إذن : $dx = \left(\frac{2}{t}\right)dt$

إذا كان : $x = 0$ فإن : $t = 0$

إذا كان : $x = \ln 4$ فإن : $x = 2$

و لدينا كذلك : $x\sqrt{e^x} = 2t\ln t$

و بالتالي :

$$J = \int_0^{\ln 4} x\sqrt{e^x}\,dx = \int_1^2 2t\ln t\cdot\left(\frac{2}{t}\right)dt$$

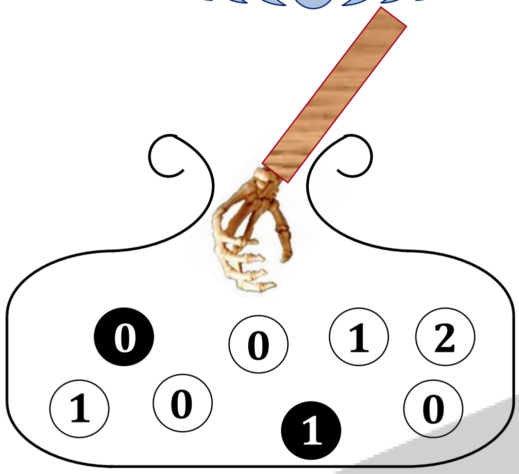
$$= \int_1^2 4\ln t\,dt$$

$$= 4\int_1^2 \ln t\,dt$$

$$= \boxed{4(2\ln 2 - 1)}$$

التمرين الثاني :

1



سوف نستعمل في هذا التمرين تعريف الاحتمال و كذلك تقنية الاحتمال المضاد و أقصد المتساويتين التاليتين :

$$\boxed{\begin{cases} p(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} \\ p(B) + p(\bar{B}) = 1 \end{cases}}$$

لدينا في هذا التمرين الحدثين A و B معرفين كما يلي :

A : " الكرتان المسحوبتان من نفس اللون "
B : " جداء العددين المسجلين على الكرتين منعدم "

عندما نسحب من الكيس كرتين في آن واحد فإن كون امكانيات هذه التجربة العشوائية معرف بـ $card(\Omega) = C_8^2 = 28$.

و لدينا كذلك C_6^2 امكانية للحصول على كرتين بيضاوين.
و لدينا كذلك C_2^2 امكانية للحصول على كرتين سوداوين.

إذن احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون يساوي :

$$p(A) = p\left(\text{الكرتان من نفس اللون}\right)$$

$$= p\left(\text{سوداوين}\quad\text{أو}\quad\text{بيضاوين}\right)$$

$$= p\left(\text{بيضاوين}\right) + p\left(\text{سوداوين}\right)$$

$$= \frac{card\left(\text{بيضاوين}\right)}{card(\Omega)} + \frac{card\left(\text{سوداوين}\right)}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{C_6^2}{28} + \frac{C_2^2}{28} = \frac{15}{28} + \frac{1}{28} = \frac{16}{28} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

لحساب احتمال الحدث B نستعمل تقنية الحدث المضاد : $p(B) = 1 - p(\bar{B})$

$$p\left(\text{الجداء منعدم}\right) = 1 - p\left(\text{الجداء غير منعدم}\right)$$

$$= 1 - p\left(\text{الكرتان تخالفان الصفر معا}\right)$$

$$= 1 - \frac{card\left(\text{الكرتان تخالفان الصفر معا}\right)}{card(\Omega)}$$

$$= 1 - \frac{C_4^2}{28} = 1 - \frac{6}{28} = \frac{22}{28} = \boxed{\frac{11}{14}}$$

YOUR WAY
جمعية طريقكم لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

2

نقصد بقانون احتمال متغير عشوائي احتمال كل قيمة من قيم هذا المتغير العشوائي. في هذا السؤال لا تهمنا ألوان الكرات بل الأعداد التي تحملها.

عندما نسحب كرتين من الكيس فإن الإمكانيات الخمس التي يمكن الحصول عليها هي كالتالي : 00 أو 01 أو 02 أو 11 أو 21 .

بما أن المتغير العشوائي X يربط كل سحبة بمجموع العددين اللذين تحملهما الكرتان المسحوبتان فإن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2 و 3 . أي بتعبير آخر : $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

لنحسب الآن احتمال كل قيمة من هذه القيم :

$$\begin{aligned} p[X=0] &= p\left(\text{الكرتان تحملان معا الصفر}\right) \\ &= \frac{card\left(\text{الكرتان تحملان معا الصفر}\right)}{card(\Omega)} \\ &= \frac{C_4^2}{28} = \frac{6}{28} = \boxed{\frac{3}{14}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p[X=1] &= p\left(\text{إحداهما تحمل 0 و الاخرى 1}\right) \\ &= \frac{card\left(\text{إحداهما تحمل 0 و الاخرى 1}\right)}{card(\Omega)} \\ &= \frac{C_4^1 \times C_3^1}{28} = \frac{4\times 3}{28} = \boxed{\frac{3}{7}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p[X=2] &= p\left(1+1 \text{ أو } 2+0\right) \\ &= p(1+1) + p(2+0) \\ &= p\left(\text{الكرتان تحملان معا 1}\right) + p\left(\text{احداهما 0 و الاخرى 2}\right) \\ &= \frac{card\left(\text{الكرتان تحملان معا 1}\right)}{card(\Omega)} + \frac{card\left(\text{احداهما 0 و الاخرى 2}\right)}{card(\Omega)} \\ &= \frac{C_3^2}{28} + \frac{C_4^1\times C_1^1}{28} = \frac{3}{28} + \frac{4}{28} = \frac{7}{28} = \boxed{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p[X=3] &= p\left(\text{احداهما 1 و الاخرى 2}\right) \\ &= \frac{card\left(\text{إحداهما تحمل 1 و الاخرى 2}\right)}{card(\Omega)} \\ &= \frac{C_3^1\times C_1^1}{28} = \boxed{\frac{3}{28}} \end{aligned}$$

إذن قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$P_X : \{0;1;2;3\} \to [0;1]$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_X(0) &= \frac{3}{14} \\ P_X(1) &= \frac{3}{7} \\ P_X(2) &= \frac{1}{4} \\ P_X(3) &= \frac{3}{28} \end{aligned}}$$

للتأكد من صحة الإجابة يجب أن تحصل على ما يلي :

$$\boxed{P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) + P_X(3) = 1}$$

التمرين الثالث :

1

ليكن z' و z'' حلا المعادلة (E) التالية : $(E) : mz^2 - 2z + \bar{z} = 0$

لدينا :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-2)^2 - 4m\bar{m} \\ &= 4 - 4m\bar{m} \\ &= 4(1 - m\bar{m}) \\ &= 4(1 - |m|^2) \\ &= 4\left(1 - \sqrt{2}^2\right) \\ &= 4(1-2) \\ &= -4 \\ &= (2i)^2 \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{z'' = \frac{2-2i}{2m} = \frac{1-i}{m}}$ و $\boxed{z' = \frac{2+2i}{2m} = \frac{1+i}{m}}$

2

في البداية لدينا : $m = \sqrt{2}e^{i\alpha}$.

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \boxed{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} 1-i &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) \\ &= \boxed{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}} \end{aligned}$$

و كذلك : $z' = \frac{1+i}{m} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\alpha}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$

إذن : $z'' = \frac{1-i}{m} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\alpha}} = e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$

و بالتالي : $\frac{z'}{z''} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}}{e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

3

نرمز بـ z_A و z_B و z_C لألحاق النقط A و B و C

لدينا باستعمال تعريف معيار عدد عقدي :

$$\boxed{\begin{aligned} OA &= |z_A - z_O| = |z'| = \left|e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\right| = 1 \\ AC &= |z_C - z_A| = |z''| = \left|e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\right| = 1 \\ CB &= |z_B - z_C| = |-z'| = \left|-e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\right| = 1 \\ OB &= |z_B - z_O| = |z''| = \left|e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}\right| = 1 \end{aligned}}$$

طريقك YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

نستنتج إذن أن الرباعي $OABC$ معين لأن جميع أضلاعه متقايسة.
و لكي يصبح مربعا يكفي أن نبين أن إحدى زواياه قائمة .

لدينا : $\dfrac{(z' + z'') - z''}{(z' + z'') - z'} = \dfrac{z'}{z''} = e^{\frac{i\pi}{2}}$

إذن : $\dfrac{z_C - z_B}{z_C - z_A} = e^{\frac{i\pi}{2}}$

و منه : $\boxed{\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]}$

و هذا يعني بكل بساطة أن الزاوية $\hat{C}$ زاوية قائمة

و بالتالي $OACB$ مربع لأنه معين إحدى زواياه قائمة .

التمرين الرابع :

1

لدينا : $(\mathcal{P}) : x + y - z - 3 = 0$

إذن $\vec{n}(1;1;-1)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم $(\mathcal{D})$.

بما أن المستقيم $(\mathcal{D})$ مار من النقطة A و عمودي على المستوى $(\mathcal{P})$.

فإن المتجهتان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{AM}$ مستقيميتان .

إذن يوجد عدد حقيقي t بحيث : $\overrightarrow{AM} = t\vec{n}$.

يعني : $\begin{pmatrix} x-2 \\ y-0 \\ z-2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ يعني : $\begin{cases} x - 2 = t \\ y = t \\ z - 2 = -t \end{cases}$

يعني : $\boxed{\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t \\ z = -t + 2 \end{cases}}$

و هذه الكتابة الاخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم $(\mathcal{D})$.

2

لتكن $B(x_B;x_B;x_B)$ نقطة تقاطع المستوى $(\mathcal{P})$ و المستقيم $(\mathcal{D})$

إذن يوجد عدد حقيقي t بحيث : $\boxed{\begin{cases} x_B = t + 2 \\ y_B = t + 2 \\ z_B = t + 2 \\ x_B + y_B - z_B - 3 = 0 \end{cases}}$

نعوض x_B و y_B و z_B في آخر معادلة من النظمة و ذلك للحصول على معادلة تضم فقط البارامتر t .

لدينا : $x_B + y_B - z_B - 3 = 0$

إذن : $(t + 2) + t - (-t + 2) - 3 = 0$

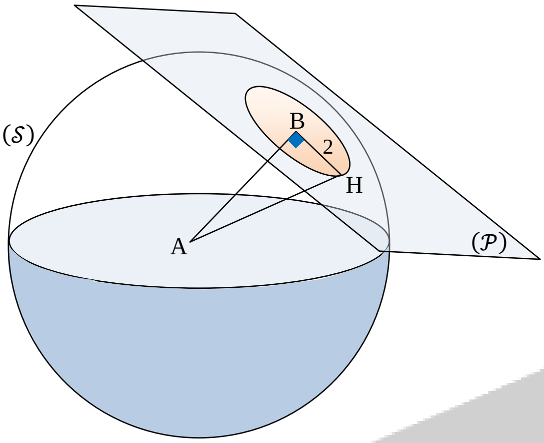
يعني : $3t = 3$ أي : $t = 1$

نرجع بعد ذلك و نعوض $t = 1$ في تعابير x_B و y_B و z_B فنحصل على :

$$\boxed{\begin{cases} x_B = 1 + 2 = 3 \\ y_B = 1 \\ z_B = -1 + 2 = 1 \end{cases}}$$

و بالتالي : $\boxed{B\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ هي نقطة تقاطع المستوى } (\mathcal{P}) \text{ و المستقيم } (\mathcal{D}) .}$

3 أ



لتكن H نقطة من الدائرة التي مركزها B و شعاعها 2 .

شعاع الفلكة $(\mathcal{S})$ هو المسافة AH

لدينا حسب نتيجة السؤال 1 : $(\mathcal{D})$ مستقيم مار من A و عمودي على $(\mathcal{P})$.

إذن المثلث BAH قائم الزاوية فى النقطة B .

و المسافة AB هي :

$$AB \left| \begin{aligned} &= d(A;(\mathcal{P})) \\ &= \frac{|1 \times 2 + 1 \times 0 - 1 \times 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3}} \end{aligned} \right.$$

إذن بإمكانك استعمال مبرهنة فيتاغورس في المثلث BAH القائم الزاوية في B

$$AH^2 = HB^2 + AB^2 = 2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 7$$

إذن : $\boxed{AH = \sqrt{7}}$

3 ب

الفلكة $(\mathcal{S})$ مركزها $A(2;0;2)$ و شعاعها $\sqrt{7}$

إذن معادلتها الديكارتية تكتب على الشكل التالي :

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2$$
$$x^2 - 2x + 4 + y^2 + z^2 - 2z + 4 = 7$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$$

و هذه الكتابة الاخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للفلكة $(\mathcal{S})$.

التمرين الخامس :

1 أ

في البداية لدينا : $f(0) = 4 \times 0 \times \sqrt{0} - 3 \times 0^2 = 0$

و لدينا كذلك : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 4x\sqrt{x} - 3x^2 = 0 = f(0)$

إذن f دالة متصلة على اليمين في الصفر .

و لدينا كذلك : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(1 - x^3) = 0 = f(0)$

إذن f دالة متصلة على اليسار في الصفر .

و بالتالي f دالة متصلة في الصفر لأنها متصلة على اليمين و اليسار .

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)}$$

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

ب 1

لكي نبرهن على أن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة O يكفي أن نبرهن على أنها تمتلك نفس العدد المشتق على يمين و على يسار الصفر .

لندرس أولا الاشتقاق على يمين الصفر $(x > 0)$.

لدينا $(x > 0)$ إذن $f(x) = 4x\sqrt{x} - 3x^2$.

و منه نحسب النهاية على اليمين كما يلي :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{4x\sqrt{x}-3x^2}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(4\sqrt{x}-3x\right) = 4\sqrt{0} - 3\times 0 = 0 = f'_d(0)$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر و حصلنا على : $\overset{(1)}{\boxed{f'_d(0) = 0}}$.

لندرس ثانيا الاشتقاق على يسار الصفر $(x < 0)$.

لدينا $(x < 0)$ إذن $f(x) = \ln(1 - x^3)$.

و منه نحسب النهاية على اليسار كما يلي :

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x^3)}{x}$$

نحسب النهاية التالية $\boxed{\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x^3)}{x}}$ باستعمال تقنية تغيير المتغير

نضع $t = (-x)^3$ إذن $x = -t^{\frac{1}{3}}$

إذا كان $(x < 0)$ فإن $(-x > 0)$ يعني أن $(-x)^3 > 0$.

إذن : $(t > 0)$

و هذا يعني أنه إذا كان المتغير x يؤول إلى الصفر من جهة اليسار فإن المتغير t يؤول إلى الصفر من جهة اليمين .

إذن النهاية تصبح :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x^3)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+(-x)^3)}{x} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)}{-t^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)}{-t^{\frac{-2}{3}}\times t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(-t^{\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(-e^{\frac{2}{3}\ln t}\right)\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)$$

$$= \left(-e^{\frac{2}{3}\ln(0^+)}\right)(1) = \left(-e^{\frac{2}{3}(-\infty)}\right)$$

$$= \left(-e^{-\infty}\right) = 0 = \boxed{f'_g(0)}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليسار في الصفر و حصلنا على : $\boxed{f'_g(0) = 0}$(2)

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $f'_d(0) = f'_g(0)$.

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة O و العدد المشتق هو : $f'(0) = 0$

و لتفسير هذه النتيجة هندسيا نقول بأن محور الأفاصيل مماس للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي أفصولها 0 لأن $f(0) = 0$ و $f'(0) = 0$.

2

ندرس اشتقاق الدالة f وفق حالتين :

الحالة الاولى : إذا كان $(x < 0)$ إذن : $f(x) = \ln(1 - x^3)$

في البداية وجب التذكير بما يلي : إذا كانت g دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I و كانت f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال J . إذن تكون الدالة $f \circ g$ قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت جل صور عناصر المجال I بالدالة g تقبل صورا بالدالة f . أو بتعبير أسهل ، إذا كان : $g(I) \subseteq J$.

لدينا الدالة $g : x \to (1 - x^3)$ معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty; 0[$ لأنها حدودية .

و لدينا أيضا $h : x \to \ln x$ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$.

لنبرهن على أن صورة المجال $]-\infty; 0[$ بالدالة g توجد ضمن $]0; +\infty[$.

يعني نريد أن نبرهن على أن : $g(]-\infty; 0[) \subseteq]0; +\infty[$.

من أجل ذلك نختار عنصرا x من المجال $]-\infty; 0[$ و نبين أن صورته بالدالة g تنتمي إلى المجال $]0; +\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $]-\infty; 0[$.

إذن : $x < 0$ و منه : $x^3 < 0$.

أي : $-x^3 > 0$ يعني : $1 - x^3 > 1$ أي : $g(x) > 1 > 0$.

و منه : $g(x) > 0$ إذن : $g(x) \in]0; +\infty[$.

و بالتالي : $g(]-\infty; 0[) \subseteq]0; +\infty[$.

نستطيع الآن أن نقول أن $x \to \ln(1 - x^3)$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 0[$.

و إذا افترضنا أنك لم تكتب هذا أثناء الامتحان فلا أعتقد أن ذلك سيؤثر على نقطة هذا السؤال . و الشيء المهم و المؤكد هو ايجاد الدالة المشتقة :

لدينا : $f(x) = h \circ g(x)$ بحيث : $\left.\begin{matrix} h(x) = \ln x \\ g(x) = 1 - x^3 \end{matrix}\right\}$.

إذن حسب مبرهنة مشتقة مُرَكَّب دالتين نحصل على ما يلي :

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(g(x)) = (-3x^2)\left(\frac{1}{1-x^3}\right) = \frac{-3x^2}{1-x^3}$$

و بما أن $x < 0$ فإن $1 - x^3 > 0$ و $-3x^2 < 0$.

إذن $\frac{-3x^2}{1-x^3} < 0$ أي : $f'(x) < 0$

و من هذا نستنتج أن الدالة f تناقصية قطعا على المجال $]-\infty; 0[$.

الحالة الثانية : إذا كان $x \geq 0$ إذن : $f(x) = 4x\sqrt{x} - 3x^2$

و منه نستنتج أن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ لانها تشكيلة منسجمة من دوال متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $[0; +\infty[$.

$$f'(x) = \left(4x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x^2\right)' = \left(4x^{\frac{3}{2}} - 3x^2\right)' = 4\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right) - 3(2x) = 6x^{\frac{1}{2}} - 6x = 6x^{\frac{1}{2}}\left(1 - x^{\frac{1}{2}}\right) = \boxed{6\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}$$

طريقكم YOUR WAY جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

و يبين الجدول التالي جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
$(1-\sqrt{x})$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

3 أ

عندما يؤول x إلى $-\infty$ يكون تعبير الدالة f هو $f(x)=\ln(1-x^3)$

إذن نحسب نهاية الدالة f عند كما يلي :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln(1-x^3)=\ln(1-(-\infty)^3)$$
$$=\ln(1-(-\infty))$$
$$=\ln(1+\infty)$$
$$=\boxed{(+\infty)}$$

و عندما يؤول x إلى $+\infty$.

يكون تعبير الدالة f هو : $f(x)=4x\sqrt{x}-3x^2$.

إذن نحسب نهاية الدالة f عند كما يلي :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(4x\sqrt{x}-3x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(4x\cdot x^{\frac{1}{2}}-3x^2\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(4x^{\frac{3}{2}}-3x^2\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(4x^{\frac{-1}{2}}-3\right)$$
$$=(+\infty)(4\times0-3)$$
$$=(+\infty)(-3)$$
$$=\boxed{(-\infty)}$$

3 ب

ليكن x عددا حقيقيا سالبا قطعا إذن :

$$f(x)=\ln(1-x^3)=\ln[1+(-x)^3]$$
$$=\ln\left[(-x)^3\left(1+\frac{1}{(-x)^3}\right)\right]$$
$$=\ln[(-x)^3]+\ln\left[\left(1+\frac{1}{(-x)^3}\right)\right]$$
$$=3\ln(-x)+\ln\left(1-\frac{1}{x^3}\right)$$
$$=\boxed{3\ln(-x)+\ln(1-x^{-3})}$$

إذن : $\boxed{\dfrac{f(x)}{x}=3\left(\dfrac{\ln(-x)}{x}\right)+\dfrac{\ln(1-x^{-3})}{x}}$

3 ج

في البداية نُذَكِّرُ بالنهايتين الهامتين التاليتين :

$\boxed{\lim_{t\to0}\left(\dfrac{\ln(1+t)}{t}\right)=1}$ و $\boxed{\lim_{t\to+\infty}\left(\dfrac{\ln t}{t}\right)=0}$

لدينا حسب نتيجة السؤال ب : $\dfrac{f(x)}{x}=3\left(\dfrac{\ln(-x)}{x}\right)+\dfrac{\ln(1-x^{-3})}{x}$

إذن : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=3\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x^{-3})}{x}$

لنحسب النهاية التالية : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{(-x)}=-\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=-x}}\frac{\ln t}{t}=0$$

لنحسب النهاية: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x^{-3})}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+(-x)^{-3})}{x}$

نضع : $t=(-x)^{-3}$ إذن $x=-t^{\frac{-1}{3}}$

نلاحظ أنه إذا كان $x\to-\infty$ فإن $t\to0^+$.

إذن النهاية تصبح :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+(-x)^{-3})}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+t)}{-t^{\frac{-1}{3}}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)}{-t\cdot t^{\frac{-4}{3}}}$$
$$=\lim_{t\to0^+}\left(-t^{\frac{4}{3}}\right)\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)$$
$$=\lim_{t\to0^+}\left(-e^{\frac{4}{3}\ln t}\right)\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)$$
$$=\lim_{t\to0^+}\left(-e^{\frac{4}{3}\ln t}\right)\underbrace{\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)}_{\xrightarrow{0^+}\ \boxed{1}}$$
$$=\left(-e^{\frac{4}{3}\ln(0^+)}\right)\times(1)$$
$$=\left(-e^{\frac{4}{3}(-\infty)}\right)\times(1)$$
$$=\left(-e^{(-\infty)}\right)\times(1)$$
$$=(-0)\times(1)=\boxed{0}$$

حصلنا إذن على ما يلي : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0}$

و لدينا حسب ما سبق : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$

إذن من هاتين النهايتين نستنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الافاصيل .

من جهة ثانية لدينا : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$

نظيف النهاية التالية :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x\sqrt{x}-3x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(4\sqrt{x}-3x\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-3\right)=(+\infty)\left(\frac{4}{\sqrt{+\infty}}-3\right)=(+\infty)(0-3)$$
$$=(+\infty)(-3)$$
$$=\boxed{(-\infty)}$$

YOUR WAY
توجيه وإرشاد شباب المستقبل

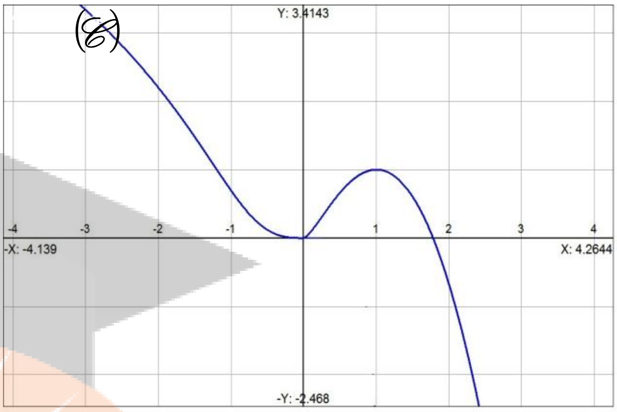
حصلنا إذن على النهايتين التاليتين :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty} \quad \text{و} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = -\infty}$$

و هذا يعني أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الاراتيب .

4

التمثيل المبياني للدالة f .



5 أ

لدينا الدالة h هي قصور الدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

يعني : $\forall\, x \,\epsilon\,]-\infty;0[\;;\; h(x) = \ln(1-x^2)$

و لدينا حسب نتيجة السؤال 2 : f متصلة و تناقصية قطعا على $]-\infty;0[$.

إذن h دالة متصلة و تناقصية قطعا على $]-\infty;0[$.

يعني أن h تقابل من المجال $]-\infty;0[$ نحو صورته $J = h(]-\infty;0[)$

و لدينا : $J = h(]-\infty;0[) = \left]h(0)\,;\, \lim_{x\to-\infty} h(x)\right[=]0;+\infty[$

5 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

نضع $y = h^{-1}(x)$ إذن $x = h(y)$ يعني $x = \ln(1-y^3)$.

يعني $e^x = 1-y^3$ يعني $1-e^x = y^3$ يعني $(1-e^x)^{\frac{1}{3}} = y$

و بالتالي الدالة العكسية h^{-1} معرفة بما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{l} h^{-1} :\ ]0;+\infty[\;\to\;]-\infty;0[\\ \qquad x \;\to\; (1-e^x)^{\frac{1}{3}} \end{array}}$$

6 أ

لنبرهن بالترجع على أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \;;\; \frac{4}{9} \le u_n \le 1$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = \frac{4}{9}$.

إذن $\frac{4}{9} \le \frac{4}{9} \le 1$ يعني $\frac{4}{9} \le u_0 \le 1$.

نفترض الآن أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \;;\; \frac{4}{9} \le u_n \le 1$

و ننطلق من التأطير التالي : $\frac{4}{9} \le u_n \le 1$

بما أن f متصلة و تزايدية على $[0;1]$ فإن : $f\left(\frac{4}{9}\right) \le f(u_n) \le f(1)$.

يعني : $\frac{16}{27} \le 4u_n\sqrt{u_n} - 3u_n^2 \le 1$ أي : $\frac{16}{27} \le u_{n+1} \le 1$.

و بما أن : $\frac{4}{9} < \frac{16}{27}$ فإن : $\frac{4}{9} \le u_{n+1} \le 1$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \;;\; \frac{4}{9} \le u_n \le 1}$.

6 ب

لنبرهن على أن : $f(x) \ge x \;;\; \forall\, x \,\epsilon \left[\frac{4}{9};1\right]$.

ليكن x عنصرا من المجال $\left[\frac{4}{9};1\right]$.

لدينا : $f(x) - x = 4x\sqrt{x} - 3x^2 - x = x\left(-3x + 4\sqrt{x} - 1\right)$

نضع $x = y^2$ إذن $-3x + 4\sqrt{x} - 1 = -3y^2 + 4y - 1$

ليكن Δ مميزثلاثية الحدود $-3y^2 + 4y - 1$ إذن : $\Delta = 16 - 12 = 4$.

نحصل إذن على جذرين y_1 و y_2 للحدودية المذكورة معرفين بما يلي :

$$\boxed{y_1 = \frac{-4-2}{-6} = 1} \quad \text{و} \quad \boxed{y_2 = \frac{-4+2}{-6} = \frac{1}{3}}$$

إذن نحصل على : $-3y^2 + 4y - 1 = -3(y-1)\left(y - \frac{1}{3}\right)$

بالعودة إلى التعبير الأول نحصل على ما يلي :

$$\begin{array}{l|l} x\left(-3x + 4\sqrt{x} - 1\right) & = y^2(-3y^2 + 4y - 1) \\ & = -3y^2(y-1)\left(y - \frac{1}{3}\right) \\ & = -3x(\sqrt{x} - 1)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{3}\right) \end{array}$$

و بالتالي : $\boxed{f(x) - x = -3x(\sqrt{x} - 1)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{3}\right)}$ $(**)$

لدينا $\frac{4}{9} \le x \le 1$ إذن $\boxed{(-3x)\text{ عدد سالب}}$ (1)

و لدينا كذلك $\frac{2}{3} \le \sqrt{x} \le 1$ و منه $\frac{-1}{3} \le \sqrt{x} - 1 \le 0$

إذن : $\boxed{\sqrt{x} - 1 \text{ عدد سالب}}$ (2)

و لدينا كذلك $\frac{1}{3} \le \sqrt{x} - \frac{1}{3} \le \frac{2}{3}$ و منه $\boxed{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{3}\right) \text{ عدد موجب}}$ (3)

من النتائج (1) و (2) و (3) نستنتج أن :

$$\boxed{-3x(\sqrt{x} - 1)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{3}\right) \text{ عدد موجب}}$$

إذن باستعمال النتيجة $(**)$ نحصل على ما يلي :

$\forall\, x \,\epsilon \left[\frac{4}{9};1\right] \;;\; f(x) - x \ge 0$

و بالتالي : $\boxed{\forall\, x \,\epsilon \left[\frac{4}{9};1\right] \;;\; f(x) \ge x}$ $(\blacksquare)$

لدينا حسب نتيجة السؤال 1- أ - : $\frac{4}{9} \le u_n \le 1 \;;\; (\forall n\epsilon\mathbb{N})$

إذن : $u_n \,\epsilon \left[\frac{4}{9};1\right] \;;\; (\forall n\epsilon\mathbb{N})$

و منه حسب النتيجة $(\blacksquare)$: $f(u_n) \ge u_n \;;\; (\forall n\epsilon\mathbb{N})$

يعني : $4u_n\sqrt{u_n} - 3u_n^2 \ge u_n \;;\; (\forall n\epsilon\mathbb{N})$

يعني : $u_{n+1} \ge u_n \;;\; (\forall n\epsilon\mathbb{N})$

و بالتالي : $\boxed{(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \text{ متتالية تزايدية}}$.

6 ج

بما أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ تزايدية و مكبورة بالعدد 1 (يعني $u_n \le 1$)

فإن هذه المتتالية متقاربة .

و بما أن الدالة f متصلة و تزايدية قطعا على المجال $\left[\frac{4}{9};1\right]$

فإن نهاية المتتالية ℓ $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ تحقق : $f(\ell) = \ell$ و $\frac{4}{9} \le \ell \le 1$

يعني : $f(\ell) - \ell = 0$ و $\frac{4}{9} \le \ell \le 1$.

و لدينا حسب النتيجة $(**)$: $f(\ell) - \ell = -3\ell(\sqrt{\ell} - 1)\left(\sqrt{\ell} - \frac{1}{3}\right)$

إذن المعادلة $f(\ell) - \ell = 0$ تصبح $-3\ell(\sqrt{\ell} - 1)\left(\sqrt{\ell} - \frac{1}{3}\right) = 0$

يعني : $\ell = \frac{1}{9}$ أو $\ell = 1$ أو $\ell = 0$.

و نعلم أن : $\frac{4}{9} \le \ell \le 1$ إذن نستنتج أن $\boxed{\ell = 1}$.

طريقكم YOUR WAY توجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الأول : (2,5 ن)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر المستوى $(\mathcal{P})$ و الفلكة $(\mathcal{S})$ المعرفين على التوالي بالمعادلتين الديكارتيتين التاليتين :

$$\begin{cases}(\mathcal{P}) \ : \ x-2y+2z-2=0 \\ (\mathcal{S}) \ : \ x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0\end{cases}$$

0,50 ن | 1 | حدد مركز و شعاع الفلكة $(\mathcal{S})$.

0,50 ن | 2 | بين أن المستوى $(\mathcal{P})$ مماس للفلكة $(\mathcal{S})$.

1,50 ن | 3 | حدد نقطة تماس المستوى $(\mathcal{P})$ و الفلكة $(\mathcal{S})$.

التمرين الثاني : (2,5 ن)

1,00 ن | 1 | أحسب التكامل التالي : $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}|\ln x|\,dx$

0,50 ن | 2 | أ | أوجد العددين a و b بحيث يكون : $\dfrac{2t}{1+t}=a+\dfrac{b}{1+t}$; $(\forall t\neq -1)$

1,00 ن | 2 | ب | أحسب التكامل التالي : $J=\displaystyle\int_{2}^{7}\frac{1}{1+\sqrt{2+x}}\,dx$ (يمكنك وضع $t=\sqrt{2+x}$)

التمرين الثالث : (3,0 ن)

يحتوي كيس على 6 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس و تحمل الأعداد -2 و -1 و 0 و 1 و 1 و 2

نعتبر الاختبار التالي : ' نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الكيس ' .

1 | نعتبر، بعد القيام بهذا الاختبار، الحدثين التاليين :

A : " من بين الكرات المسحوبة، توجد كرة على الأقل تحمل العدد 1 ".

S : " مجموع الأعداد المكتوبة على الكرات المسحوبة منعدم ".

1,00 ن | 1 | أ | أحسب احتمال الحدث A .

1,00 ن | 1 | ب | بين أن احتمال الحدث S يساوي $\dfrac{1}{5}$.

نكرر الاختبار السابق أربع مرات (نعيد في كل مرة الكرات المسحوبة إلى الكيس)

1,00 ن | 2 | ما هو احتمال الحصول على الحدث S ثلاث مرات بالضبط ؟

التمرين الرابع : (3,5 ن)

1 أ أكتب على الشكل الجبري $(4+i)^2$. — 0,50 ن

1 ب حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2+(2-3i)z-5(1+i)=0$ — 1,00 ن

2 نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي : $a=1+2i$ و $b=-3+i$ و $c=6i$.

2 أ أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي : $\frac{c-a}{b-a}$ — 1,00 ن

2 ب استنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية. — 1,00 ن

التمرين الخامس: (9,0ن)

I نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0\,;\,+\infty[$ بما يلي : $\boxed{f(x)=x-2\sqrt{x}+2}$

I 1 بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ — 0,50 ن

I 2 أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر. — 0,50 ن

I 3 بين أن الدالة f تناقصية على المجال $[0\,;1]$ و تزايدية على المجال $[1\,;\,+\infty[$. — 1,00 ن

II نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\boxed{\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n)\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N}) \\ u_0=2 \end{cases}}$

II 1 بين بالترجع أن : $1\le u_n\le 2\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})$. — 1,00 ن

II 2 بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية . — 0,50 ن

II 3 استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثم أحسب نهايتها . — 1,00 ن

III نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0\,;\,+\infty[$ بما يلي : $\boxed{g(x)=\ln\left(x-2\sqrt{x}+2\right)}$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة في معلم متعامد ممنظم.

III 1 أ أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ — 0,50 ن

III 1 ب أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C})$. — 0,50 ن

III 2 أدرس تغيرات الدالة g — 1,00 ن

III 3 أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$. — 1,00 ن

III 4 لتكن h قصور الدالة g على المجال $[1\,;\,+\infty[$.

III 4 أ بين أن h تقابل من المجال $[1\,;\,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده. — 0,50 ن

III 4 ب حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من المجال J . — 1,00 ن

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2003

التمرين الأول :

1

نعلم أن المعادلة الديكارتية للفلكة التي مركزها $\Omega(a,b,c)$ و شعاعها r تكتب بصفة عامة على شكل : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

نحاول إذن تحديد a و b و c و r انطلاقا من المعادلة الديكارتية للفلكة $(\mathcal{S})$.

لدينا : $(x^2-2x)+y^2+(z^2+2z)+1=0$

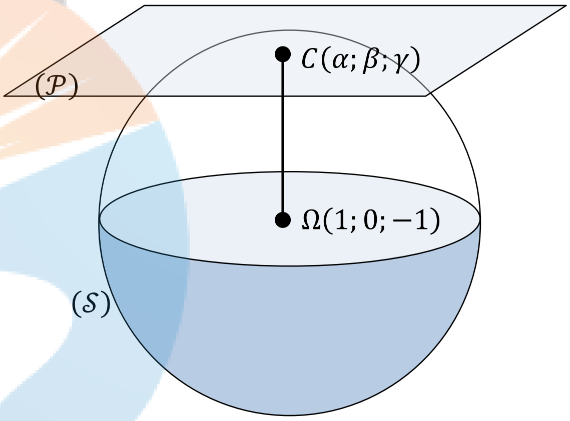
$$\Leftrightarrow (x^2-2x+1-1)+y^2+(z^2+2z+1-1)+1=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x-1)^2-1+y^2+(z+1)^2-1+1=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1^2$$

إذن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1,0,-1)$ و شعاعها $r=1$.

2



سوف نبرهن على أن : $d(\Omega,(\mathcal{P}))=r$.

لدينا : $\Omega(1,0,-1)$ و $(\mathcal{P}): 1x-2y+2z-2=0$

إذن :
$$d(\Omega,(\mathcal{P}))=\frac{|1\times 1-2\times 0+2\times(-1)-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{9}}=\boxed{1=r}$$

إذن المستوى $(\mathcal{P})$ مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة $C(\alpha,\beta,\gamma)$.

3

نعتبر المستقيم (ΩC) . لدينا $(\mathcal{P})$ مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في النقطة C .

إذن المستقيم (ΩC) عمودي على المستوى $(\mathcal{P})$.

لدينا : $(\mathcal{P}): x-2y+2z-2=0$

إذن : $\vec{n}(1,-2\,,2)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$.

إذن : المتجهتان $\overrightarrow{\Omega C}$ و $\vec{n}$ مستقيميتان .

إذن يوجد عدد حقيقي t بحيث : $\overrightarrow{\Omega C}=t\cdot\vec{n}$.

و منه : $\begin{cases}\alpha-1=t\\ \beta-0=-2t\\ \gamma+1=2t\end{cases}$ يعني : $\boxed{\begin{cases}\alpha=t+1\\ \beta=-2t\\ \gamma=2t-1\end{cases}}$

و الكتابة المؤطرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (ΩC) .

بما أن $C(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة تماس الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى $(\mathcal{P})$.

فإن : $C\epsilon(\mathcal{P})$ أي : $\alpha-2\beta+2\gamma-2=0$

أي : $(t+1)-2(-2t)+2(2t-1)-2=0$

يعني : $9t=3$ و منه : $t=\frac{1}{3}$

نعوض t بالعدد $\frac{1}{3}$ في التمثيل البارامتري للمستقيم (ΩC)

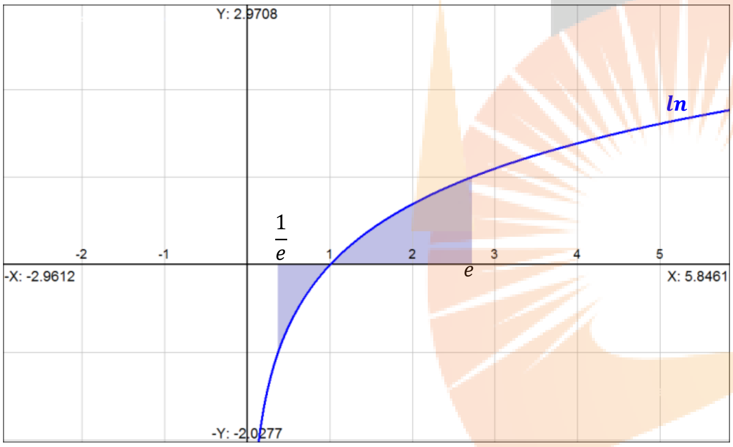
و ذلك لإيجاد α و β و γ :
$$\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}\\ \beta=-2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{-2}{3}\\ \gamma=2\left(\frac{1}{3}\right)-1=\frac{-1}{3}\end{cases}$$

و بالتالي : النقطة $C\left(\frac{4}{3};\frac{-2}{3};\frac{-1}{3}\right)$ هي نقطة تماس $(\mathcal{S})$ و المستوى $(\mathcal{P})$

التمرين الثاني :

1

في هذا السؤال نرسم أولا التمثيل المبياني للدالة f على حيز تعريفها $]0;+\infty[$



نلاحظ أنه إذا كان $\epsilon\left[\frac{1}{e};1\right]$ فإن : $\ln x\leq 0$ أي : $|\ln x|=-\ln x$

و كذلك إذا كان $[1;e]$ فإن : $\ln x\geq 0$ أي : $|\ln x|=\ln x$

و بالتالي :
$$I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}|\ln x|\,dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}|\ln x|\,dx+\int_{1}^{e}\frac{1}{x}|\ln x|\,dx$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}(-\ln x)\,dx+\int_{1}^{e}\frac{1}{x}(\ln x)\,dx$$
$$=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx+\int_{1}^{e}\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

نحتاج إلى تحديد الدالة الأصلية للدالة $x\to\frac{\ln x}{x}$.

و لإيجادها نستعين بتقنية المكاملة بالأجزاء :

$$\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx=\int\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{v'}\underbrace{(\ln x)}_{u}\,dx=(\ln x)^2-\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

إذن : $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx+\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)=(\ln x)^2$

أي : $2\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx=(\ln x)^2$

و منه : $\boxed{\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx=\frac{(\ln x)^2}{2}}$

نوظف إذن هذه العلاقة في آخر تعبير للتكامل I نجد :

$$\begin{aligned}I &= -\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx+\int_{1}^{e}\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx\\ &= -\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{1}^{e}\\ &= -\left(\frac{(\ln 1)^2}{2}-\frac{\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2}{2}\right)+\left(\frac{(\ln e)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}\right)\\ &= -\left(0-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-0\right)=\boxed{1}\end{aligned}$$

2 أ

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث : $\dfrac{2t}{1+t}=a+\dfrac{b}{1+t}$

لدينا : $\dfrac{2t}{1+t}=\dfrac{a(1+t)+b}{1+t}$ إذن : $\dfrac{2t}{1+t}=\dfrac{at+(a+b)}{1+t}$

و منه : $\begin{cases}a=2\\ a+b=0\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}a=2\\ b=-2\end{cases}$

و بالتالي : $\boxed{(\forall t\neq -1)\ ;\ \dfrac{2t}{1+t}=2-\dfrac{2}{1+t}}$

2 ب

$$\boxed{J=\int_{2}^{7}\frac{1}{1+\sqrt{2+x}}dx}$$

نريد حساب التكامل J و ذلك باستعمال تقنية تغيير المتغير .

نضع : $t=\sqrt{2+x}$ إذن : $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}=\dfrac{1}{2t}$

و منه : $dx=2t\cdot dt$

إذا كان : $x=2$ فإن : $t=2$

إذا كان : $x=7$ فإن : $t=3$

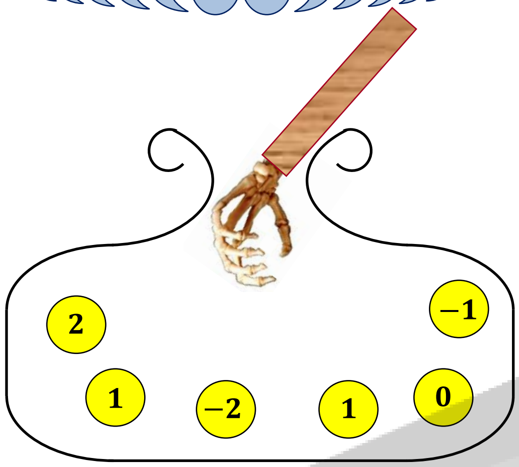
و لدينا كذلك : $\dfrac{1}{1+\sqrt{2+x}}=\dfrac{1}{1+t}$

و بالتالي التكامل J يصبح :

$$\begin{aligned}J=\int_{2}^{7}\frac{1}{1+\sqrt{2+x}}dx &= \int_{2}^{3}\left(\frac{1}{1+t}\right)(2t)\,dt\\ &= \int_{2}^{3}\left(\frac{2t}{1+t}\right)dt=\int_{2}^{3}\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt\\ &= \int_{2}^{3}2\,dt-2\int_{2}^{3}\left(\frac{1}{1+t}\right)dt\\ &= 2[t]_2^3-2[\ln(1+t)]_2^3\\ &= 2-2(\ln(1+3)-\ln(1+2))\\ &= 2-2(\ln 4-\ln 3)\\ &= 2-2\ln\left(\frac{4}{3}\right)=2\left(1-\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right)\\ &= 2\left(\ln e-\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right)=\boxed{2\ln\left(\frac{3e}{4}\right)}\end{aligned}$$

التمرين الثالث :

1 أ



عندما نسحب في آن واحد ثلاث كرات من كيس يحتوي على 6 كرات فإنه توجد C_6^3 نتيجة ممكنة . و هذا يعني أن : $card(\Omega)=C_6^3=20$ بحيث Ω هو كون امكانيات هذه التجربة العشوائية

لحساب احتمال الحدث A أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى :

لدينا الحدث A معرف بما يلي :

$A=$" من بين الكرات المسحوبة توجد كرة على الأقل تحمل الرقم 1 "

إذن الحدث $\overline{A}$ أي الحدث المضاد للحدث A معرف بما يلي :

$\bar{A}=$" الكرات الثلاث المسحوبة تحمل كلها أرقاما تخالف 1 "

و نعلم أن الحدثان A و $\overline{A}$ تربطهما العلاقة التالية : $p(A)+p(\bar{A})=1$

عندما نرغب في سحب ثلاث كرات تحمل كلها أرقاما تخالف 1 فإننا نسحب ثلاث كرات في آن واحد من كيس يحتوي على 4 كرات فقط و توجد C_4^3 إمكانية لفعل ذلك . إذن نحسب $p(\bar{A})$ كما يلي :

$$p(\bar{A})=\frac{card(\bar{A})}{card(\Omega)}=\frac{C_4^3}{20}=\boxed{\frac{4}{20}}$$

و بالتالي : $p(A)=1-p(\bar{A})=1-\dfrac{1}{5}=\boxed{\dfrac{4}{5}}$

الطريقة الثانية :

$$\begin{aligned}p(A) &= p\begin{pmatrix}\text{من الكرات الثلاث}\\ \text{توجد واحدة على}\\ \text{الأقل تحمل الرقم 1}\end{pmatrix}\\ &= p\begin{pmatrix}\text{كرتان تحملان 1} & & \text{كرة واحد تحمل 1}\\ \text{و الكرة الثانية} & \text{أو} & \text{و الكرتان الأخريان}\\ \text{تخالف 1} & & \text{تخالفان 1}\end{pmatrix}\\ &= p\begin{pmatrix}\text{كرة واحد تحمل 1}\\ \text{و الكرتان الأخريان}\\ \text{تخالفان 1}\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}\text{كرتان تحملان 1}\\ \text{و الكرة الثانية}\\ \text{تخالف 1}\end{pmatrix}\\ &= \frac{C_2^1\times C_4^2}{20}+\frac{C_2^2\times C_4^1}{20}\\ &= \frac{2\times 6}{20}+\frac{1\times 4}{20}\\ &= \frac{16}{20}=\boxed{\frac{4}{5}}\end{aligned}$$

1 ب

لدينا الاحتمال S معرف بما يلي : " مجموع الأعداد المكتوبة على الكرات المسحوبة منعدم "

توجد إذن ثلاث حالات ممكنة لهذا الحدث و هي كالتالي :

الحالة الأولى : $\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{-1}$
الحالة الثانية : $\boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{-2}$
الحالة الثالثة : $\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{-2}$

في الحالة الأولى :

لدينا C_1^1 امكانية لاختيار الكرة $\boxed{0}$
و لدينا C_2^1 إمكانية لاختيار الكرة $\boxed{1}$
و لدينا C_1^1 إمكانية لاختيار الكرة $\boxed{-1}$

إذن توجد $C_1^1 \times C_2^1 \times C_1^1$ إمكانية تحقق هذه الحالة الأولى .

في الحالة الثانية :

لدينا C_1^1 امكانية لاختيار الكرة $\boxed{0}$
و لدينا C_1^1 إمكانية لاختيار الكرة $\boxed{2}$
و لدينا C_1^1 إمكانية لاختيار الكرة $\boxed{-2}$

إذن توجد $C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1$ إمكانية تحقق هذه الحالة الأولى .

في الحالة الثالثة :

لدينا C_2^2 امكانية لاختيار الكرتين $\boxed{1}\ \boxed{1}$
و لدينا C_1^1 إمكانية لاختيار الكرة $\boxed{-2}$

إذن توجد $C_1^1 \times C_2^2$ إمكانية تحقق هذه الحالة الأولى .

$$p(S) = p\left(\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{-1}\ \text{أو}\ \boxed{0}\,\boxed{2}\,\boxed{-2}\ \text{أو}\ \boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{-2}\right)$$

$$= p\left(\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{-1}\right) + p\left(\boxed{0}\,\boxed{2}\,\boxed{-2}\right) + p\left(\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{-2}\right)$$

$$= \frac{C_1^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{20} + \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1}{20} + \frac{C_2^2 \times C_1^1}{20}$$

$$= \frac{2}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

2

تذكير : عندما نكرر n مرة تجربة عشوائية فإن احتمال وقوع حدث A بالضبط k مرة هو : $p_k(A) = C_n^k (p(A))^k (1 - p(A))^{n-k}$

بحيث $p(A)$ هو احتمال الحدث A دون تكرار التجربة .

في هذا التمرين : التجربة هي سحب ثلاث كرات في آن واحد من كيس يحتوي على 6 كرات و نكرر هذه التجربة أربع مرات بشرط إعادة الكرات في كل مرة إلى الكيس.

لديناا احتمال الحدث S يساوي $p(S) = \frac{1}{5}$.

إذن احتمال وقوع الحدث S بالضبط 3 مرات هو :

$$p_3(S) = C_4^3 (p(S))^3 (1 - p(S))^{4-3} = 4\left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^1$$

$$= \frac{4 \times 1 \times 4}{125 \times 5} = \boxed{\frac{16}{625}}$$

التمرين الرابع :

1 أ

عندما يُطرح سؤال من هذا الشكل فهذا يدل على أنه سوف يشكل مفتاح لما سيأتي فيما بعد :

$$\boxed{(4+i)^2} = 4^2 + 2 \times 4 \times i + i^2 = 16 + 8i - 1 = \boxed{15 + 8i}$$

إذن : $(*)\ \boxed{(4+i)^2 = 15 + 8i}$

1 ب

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية :

$$(E) :\ z^2 + (2 - 3i)z - 5(1 + i) = 0$$

لدينا : $\Delta = (2-3i)^2 + 20(1+i) = 4 - 12i - 9 + 20 + 20i$

$$= \boxed{15 + 8i = (4+i)^2}$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين مترافقين z_1 و z_2 .

$$z_1 = \frac{-(2-3i) + (4+i)}{2} = \frac{-2 + 3i + 4 + i}{2} = \frac{2 + 4i}{2} = \boxed{1 + 2i}$$

$$z_1 = \frac{-(2-3i) - (4+i)}{2} = \frac{-2 + 3i - 4 - i}{2} = \frac{-6 + 2i}{2} = \boxed{-3 + i}$$

2 أ

$$\boxed{\frac{c-a}{b-a}} = \frac{6i - (1+2i)}{(-3+i) - (1+2i)} = \frac{4i - 1}{-4 - i}$$

$$= \frac{(4i-1)(-4+i)}{(-4-i)(-4+i)} = \frac{-17i}{16 - (-1)} = \frac{-17i}{17}$$

$$= -i = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \boxed{e^{\frac{-i\pi}{2}}}$$

2 ب

لدينا حسب السؤال السابق : $\boxed{\frac{c-a}{b-a} = e^{\frac{-\pi i}{2}}}$

إذن : $\boxed{\begin{cases} \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{-\pi}{2}\,[\pi] \end{cases}}$

و منه : $\boxed{\begin{cases} |c-a| = |b-a| \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \end{cases}}$

إذن : $\boxed{\begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \end{cases}}$

و بالتالي المثلث ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A و قائم الزاوية في A .

YOUR WAY
وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الخامس :

1 I

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-2\sqrt{x}+2\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}\right)$$
$$= (+\infty)(1-0+0) = (+\infty)\times 1 = (+\infty)$$

2 I

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x-2\sqrt{x}+2-2}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to0^+}\frac{x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{x} = \lim_{x\to0^+}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = 1-\frac{2}{\sqrt{0^+}}$$
$$= 1-(+\infty) = (-\infty) \notin \mathbb{R}$$

حصلنا إذن على : $\boxed{\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = -\infty \notin \mathbb{R}}$

إذن f دالة غير قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر .

3 I

نلاحظ أن الدالة f عبارة عن تشكيلة من الدوال المنسجمة و المعرفة جيدا و القابلة الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$. إذن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f'(x) = 1-2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \boxed{\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)}$

بما أن : $\forall\, x \in [0;+\infty[\ ;\ \sqrt{x} \geq 0$.

فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $\sqrt{x}-1$ على المجال $]0;+\infty[$.

إذا كان $x = 1$ فإن : $\sqrt{x}-1 = 0$.
إذا كان $x > 1$ فإن : $\sqrt{x}-1 > 0$.
إذا كان $x < 1$ فإن : $\sqrt{x}-1 < 0$.

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	2	↘	1	↗	$+\infty$

إذن يتضح من هذا الجدول أن الدالة f تناقصية على المجال $[0;1]$ و تزايدية على المجال $]1;+\infty[$.

1 II

من أجل $n = 0$ لدينا : $1 \leq 2 \leq 2$ يعني : $1 \leq u_0 \leq 2$

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1 \leq u_n \leq 2$

بما أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $]1;+\infty[$.

فإن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$.

و هذا يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1 \leq u_{n+1} \leq 4-2\sqrt{2}$

و لدينا $2 > 1$ إذن : $\sqrt{2} > 1$ و منه $2\sqrt{2} > 2$.

يعني : $-2\sqrt{2} < -2$ أي : $4-2\sqrt{2} < 2$

إذن بالرجوع إلى النتيجة $(*)$ نحصل على النتيجة التالية :

$$1 \leq u_{n+1} \leq 4-2\sqrt{2} < 2$$

و منه : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1 \leq u_{n+1} \leq 2$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع نستنتج أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1 \leq u_n \leq 2$

2 II

لدينا: $u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n = u_n-2\sqrt{u_n}+2-u_n$
$= 2\left(1-\sqrt{u_n}\right)$

بما أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n \geq 1$ فإن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \sqrt{u_n} \geq 1$

و منه : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ -\sqrt{u_n} \leq -1$ يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1-\sqrt{u_n} \leq 0$

يعني : $2\left(1-\sqrt{u_n}\right) \leq 0$ أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n-u_{n+1} \leq 0$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n \leq u_{n+1}$

و بالتالي : $(u_n)_n$ متتالية تناقصية .

3 II

لدينا حسب ما سبق : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1 \leq u_n \leq 2$

إذن $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية مصغورة بالعدد 1

و بما أنها تناقصية و مصغورة بالعدد 1 فإنها متقاربة .

من جهة ثانية لدينا f دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[1;2]$.

إذن ℓ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ هي حل للمعادلة : $f(\ell) = \ell$

يعني : $\ell-2\sqrt{\ell}+2 = \ell$ أي : $-2\sqrt{\ell}+2 = 0$

يعني : $\sqrt{\ell} = 1$ و بالتالي : $\boxed{\ell = 1}$

أ 1 III

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(x-2\sqrt{x}+2\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(f(x)\right)$$

نعلم أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(f(x)\right) = \ln(+\infty) = +\infty$

و بالتالي : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

ب 1 III

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x-2\sqrt{x}+2\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x-2\sqrt{x}+2\right)}{\left(x-2\sqrt{x}+2\right)}\times\frac{\left(x-2\sqrt{x}+2\right)}{x}$$

طريقتي YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-2\sqrt{x}+2)}{(x-2\sqrt{x}+2)} \times \left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}\right)$$

لدينا من جهة : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-2\sqrt{x}+2)}{(x-2\sqrt{x}+2)} = \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=x-2\sqrt{x}+2}} \left(\frac{\ln t}{t}\right) = 0$

و من جهة أخرى : $\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}\right) = (1-0+0) = 1$

و بالتالي : $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0\times 1 = 0$

حصلنا لحد الآن على النهايتين التاليتين :

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0}$ و $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

إذن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل .

III 2

لدراسة الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ نبدأ بدراسة الإشتقاق .

نبرهن أولا على أن g قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ ثم بعد ذلك نسحب مشتقتها g' .

تذكير : لتكن g دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال I و f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال J . إذن تكون الدالة $g \circ f$ قابلة للإشتقاق على المجال I إذا كانت جل صور عناصر المجال I بالدالة g تقبل صورا بالدالة f . أو بتعبير آخر : $g(I) \subseteq J$.

في هذا التمرين لدينا : f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و ln دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

إذن تكون الدالة $\ln(f)$ قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$

إذا كان : $f([0;+\infty[) \subseteq]0;+\infty[$

و من أجل ذلك نختار عنصرا x من المجال $[0;+\infty[$ و نبرهن على أن صورته $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]0;+\infty[$.

بالرجوع إلى جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن f متصلة على المجال $[0;+\infty[$ و تمتلك قيمة دنوية و هي 1 .

هذا يعني أن : $\forall\, x \in [0;+\infty[\;;\; f(x) \geq 1$

إذن : $\forall\, x \in [0;+\infty[\;;\; f(x) > 0$

و بالتالي : $\forall\, x \in [0;+\infty[\;;\; f(x) \in]0;+\infty[$

يعني : $\boxed{f([0;+\infty[) \subset]0;+\infty[}\ (*)$

نعطي الآن الضوء الأخضر لاشتقاق الدالة g .

لدينا : $g(x) = \ln(f(x))$ إذن : $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

لدينا حسب الجزء الأول : $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

إذن : $g'(x) = \frac{1}{f(x)}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}f(x)}$

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f : $\forall\, x \in [0;+\infty[\;;\; f(x) > 0$

بما أن : $\forall\, x \in [0;+\infty[\;;\; \sqrt{x} \geq 0$

فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(\sqrt{x}-1)$.

إذا كان $x = 1$ فإن : $g'(x) = 0$

إذا كان $x > 1$ فإن : $g'(x) > 0$

إذا كان $x < 1$ فإن : $g'(x) < 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$\ln 2$	↘	0	↗	$+\infty$

إذن g دالة تناقصية على المجال $[0;1]$ و تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.

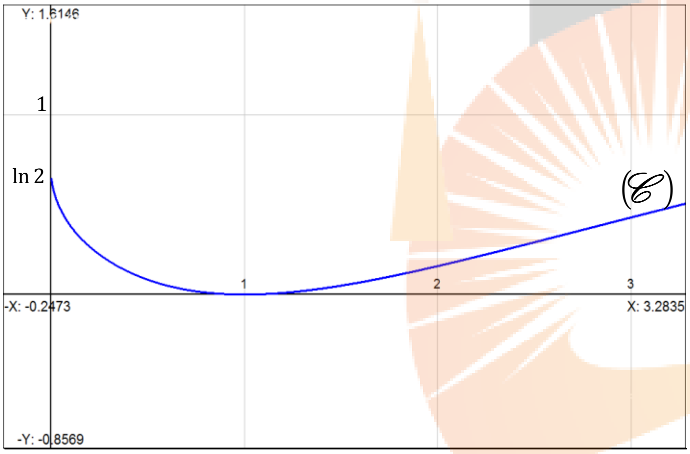
III 3

المعلومة الواردة في المعطيات : $\lim_{x\to0^+} \left(\frac{g(x)-g(0)}{x}\right) = -\infty$

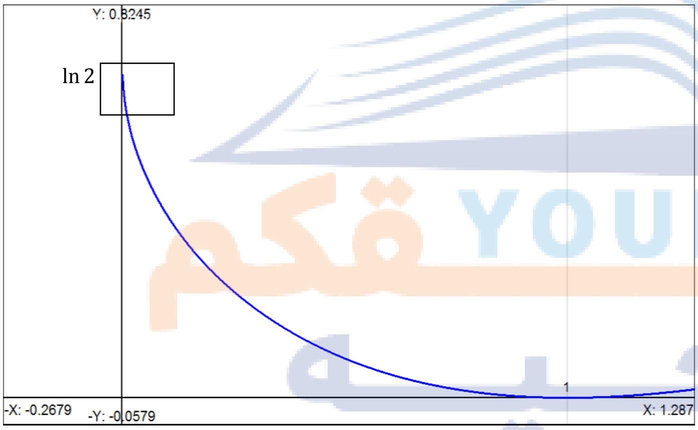
تدل على أن الدالة g غير قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر .

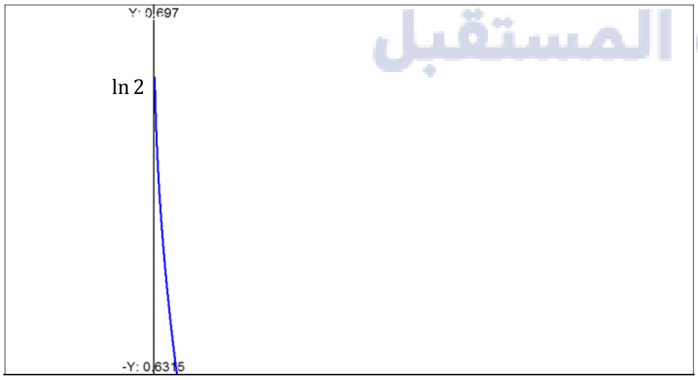
و هذا يعني مبيانيا أن محور الأراتيب مماس عمودي للمنحنى $(\mathscr{C})$ على يمين 0

نحصل إذن على التمثيل المبياني للدالة g كما يلي :



أظيف هذين المبيانين لكي ألفت انتباهك إلى ما يحدث على يمين الصفر





طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وارشاد شباب المستقبل

III 4 أ

لدينا الدالة h هي قصور الدالة g على المجال $[1;+\infty[$.

إذن h دالة معرفة بما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{l} h:[1;+\infty[\ \to J \\ \qquad x \to h(x)=g(x)\end{array}}$$

بحيث J مجال وجب تحديده .

لدينا h دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[1;+\infty[$ و ذلك حسب دراسة الدالة g .

و منه h تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو صورته J بالدالة h يعني :

$$h([1;+\infty[)=\left[h(1)\,;\,\lim_{x\to+\infty}h(x)\right[= \left[g(1)\,;\,\lim_{x\to+\infty}g(x)\right[= [0;+\infty[= J$$

إذن h تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو المجال $[0;+\infty[$.

و منه الدالة h تصبح :

$$\boxed{\begin{array}{l} h:[1;+\infty[\ \to [0;+\infty[\\ \qquad x \to h(x)=g(x)\end{array}}$$

III 4 ب

بما أن h تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو المجال $[0;+\infty[$ فإن h تقبل دالة أصلية عكسية h^{-1} معرفة بما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{l} h^{-1}:[0;+\infty[\ \to [1;+\infty[\\ \qquad y \to h^{-1}(y)\end{array}}$$

يكفي الآن تحديد التعبير الصريح للدالة h^{-1} .

ليكن y عنصرا من المجال $[0;+\infty[$.

إذن بما أن h تقابل فإن : $\exists!\, x \in [1;+\infty[\ ;\ h(x)=y$

أي : $\exists!\, x\in[1;+\infty[\ ;\ \ln(x-2\sqrt{x}+2)=y$

يعني : $\exists!\, x\in[1;+\infty[\ ;\ x-2\sqrt{x}+2=e^y$

يعني : $\exists!\, x\in[1;+\infty[\ ;\ x-2\sqrt{x}+(2-e^y)=0$

لنحل المعادلة : $x-2\sqrt{x}+(2-e^y)=0$ ذات المجهول x .

نضع $t=\sqrt{x}$ و المعادلة تصبح : $t^2-2t+(2-e^y)=0$

لدينا :

$$\Delta = (-2)^2-4(2-e^y)=4-8+4e^y = -4+4e^y=\boxed{4(e^y-1)}$$

نعلم أن $\in[0;+\infty[$ يعني : $y\ge0$

و منه : $e^y\ge1$ أي : $e^y-1\ge0$

أي : $4(e^y-1)\ge0$ يعني : $\boxed{\Delta\ge0}$

إذن المعادلة تقبل حلين حقيقيين t_1 و t_2 معرفين بما يلي :

$$t_2 = \frac{2+2\sqrt{e^y-1}}{2} = \boxed{1+\sqrt{e^y-1}} \quad \text{و} \quad t_1=\frac{2-2\sqrt{e^y-1}}{2}=\boxed{1-\sqrt{e^y-1}}$$

لدينا $y\in[0;+\infty[$ يعني : $y\ge0$

أي : $e^y\ge1$ أي : $e^y-1\ge0$

أي : $\sqrt{e^y-1}\ge0$ أي : $-\sqrt{e^y-1}\le0$

و منه : $1-\sqrt{e^y-1}\le1$ يعني : $\boxed{t_1\le1}$ (1)

و بنفس الطريقة لدينا : $y\in[0;+\infty[$ إذن : $\sqrt{e^y-1}\ge0$

أي : $1+\sqrt{e^y-1}\ge1$ يعني : $\boxed{t_2\ge1}$ (2)

بما أن $x\in[1;+\infty[$ فإن : $\sqrt{x}\in[1;+\infty[$

يعني : $\boxed{t\in[1;+\infty[}$ (3)

من النتائج (1) و (2) و (3) نستنتج أن المعادلة تقبل حلا فقط و هو t_2 .

و ذلك لأن : $t_2\in[1;+\infty[$ و $t_1\notin[1;+\infty[$

إذن : $t=\sqrt{x}=1+\sqrt{e^y-1}$

يعني : $x=\left(1+\sqrt{e^y-1}\right)^2$

يعني : $x=1+2\sqrt{e^y-1}+\left(\sqrt{e^y-1}\right)^2$

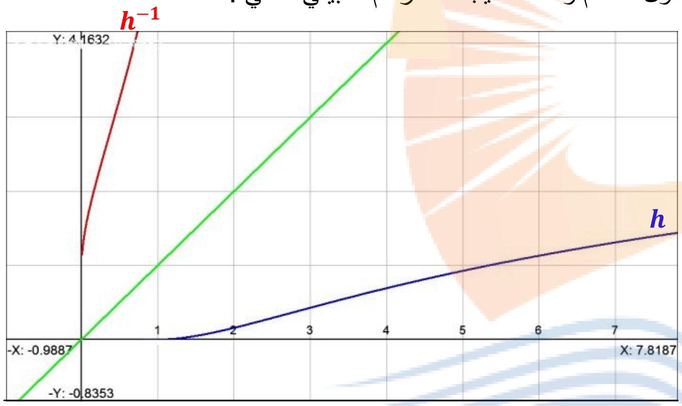
يعني : $x=1+2\sqrt{e^y-1}+e^y-1$

يعني : $x=2\sqrt{e^y-1}+e^y=h^{-1}(y)$

نستنتج إذن تعبير الدالة h^{-1} كما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{l} h^{-1}:[0;+\infty[\ \to [1;+\infty[\\ \qquad y \to h^{-1}(y)=2\sqrt{e^y-1}+e^y\end{array}}$$

إضافة : التمثيلان المبيانيان للدالتين h و h^{-1} متماثلان بالنسبة للمُنَصِّف الأول للمعلم و هذا ما يجسده الرسم المبيني التالي :



طريقكم YOUR WAY لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

الامتحــــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريـــــــا
الدورة العـــــادية 2004

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

مـــادة الريـــــاضيات
العلوم التجـــريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجـــية بمسلكيها
مدة الانجـاز 3h ـ المعامل 7

التمرين الأول : (3,5 ن)

الفضاء $(\mathfrak{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\,)$

لتكن $(\mathcal{S})$ مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث : $x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$

1 بين أن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(0,2,-1))$ و شعاعها $\sqrt{3}$.

2 أ تحقق أن : $A(-1\,,1,0\,)\,\epsilon\,(\mathcal{S})$ — 1,50 ن

2 ب أكتب معادلة المستوى $(\mathcal{P})$ المماس للفلكة $(\mathcal{S})$ عند النقطة A . — 1,00 ن

3 تحقق من أن : $x+y+z-2=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من $B(1\,,3\,,-2)$ و $\vec{n}(1\,,1\,,1\,)$ منظمية عليه . — 1,00 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E)\ :\ z^2-4iz-4(1+i)=0$

نرمز بـ z_1 و z_2 لحلي المعادلة (E) حيث : $\Re e(z_1)>0$

1 بين أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=\left[2\sqrt{2}(1+i)\right]^2$ ثم حدد الحلين z_1 و z_2 . — 0,75 ن

2 نضع : $a=2i$ و $b=\sqrt{2}(1+i)$ تحقق أن : $z_1=a+b$ و $z_1=a-b$ — 0,75 ن
و اكتب a و b على الشكل المثلثي.

3 في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\,)$
نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي a و b و z_1 .

3 أ مثل النقط A و B و C و تحقق أن : $OA=OB$ و أن : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ — 1,00 ن

3 ب استنتج أن $OBCA$ معين ثم أن : $arg(z_1)\equiv\frac{3\pi}{8}\,[2\pi]$ — 1,00 ن

التمرين الثالث : (3,0 ن)

يحتوي كيس على تسع بيدقات (لا يمكن التمييز بينها باللمس) :
بيدقتان بيضاوين تحملان الرقم 1 و ثلاثة بيدقات حمراء تحمل الأرقام 1 و 1 و 2 و أربع بيدقات سوداء تحمل الأرقام 1 و 1 و 2 و 2 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث بيدقات من الكيس.

1 أحسب احتمال الأحداث التالية : — 2,25 ن

A : " البيدقات الثلاث المسحوبة مختلفة اللون (بيدقة من كل لون) " .

B : " البيدقات الثلاث المسحوبة تحمل نفس الرقم " .

C : " من بين البيدقات المسحوبة توجد على الأقل بيدقة واحدة حمراء " .

2 أحسب احتمال الحدث : $A\cap B$. — 0,75 ن

طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الرابع : (10 ن)

I لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

I 1 أ تحقق من أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ \dfrac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \dfrac{1}{e^x+1}$ — 0,50 ن

I 1 ب استنتج أن f دالة فردية . — 0,50 ن

I 2 أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ — 0,50 ن

I 3 أ بين أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = \dfrac{-1}{2}\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$ — 1,00 ن

I 3 ب إعط جدول تغيرات الدالة f . — 0,50 ن

I 3 ج استنتج أن : $(\forall\ x\ \epsilon\ [0;+\infty[\ )\ ;\ 1 - \dfrac{2}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{2}x$ — 0,50 ن

I 4 بين أن : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(f(x) - \left(1 - \dfrac{1}{2}x\right)\right) = 0$ ثم أوِّل النتيجة هندسيا . — 0,75 ن

I 5 أنشئ في المعلم $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ المستقيم الذي معادلته $y = 1 - \frac{1}{2}x$ ثم أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$. — 1,50 ن

I 6 إذا علمت أن $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

I 6 أ بين أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ \displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{1+e^x}\right)dx = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$ — 1,25 ن

I 6 ب أحسب مساحة الحيز من المستوى المحصور بين $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي هما : $x = -1$ و $x = 0$. — 0,75 ن

II لتكن $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{e^{u_n}+1}\ ;\ (\forall n \epsilon \mathbb{N}) \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

II 1 بين بالترجع أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n > 0$ — 0,50 ن

II 2 أ تحقق باستعمال نتيجة السؤال **I 3 ج** أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$. — 0,50 ن

II 2 ب استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ تناقصية . — 0,50 ن

II 3 بين أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم احسب : $\lim\limits_{n\infty} u_n$ — 0,75 ن

أجوبة امتحان الدورة العادية 2004

التمرين الأول:

1

لدينا $(\mathcal{S})$ معرفة بالمعادلة الديكارتية التالية :

$$x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$$

$$x^2+(y^2-4y)+(z^2+2z)+2=0$$

$$x^2+(y-2)^2+(z+1)^2-4-1+2=0$$

$$(x-0)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$$

إذن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(0;2;-1)$ و شعاعها : $r=\sqrt{3}$.

2 أ

لدينا : $(-1)^2+1^2+0^2-4\times1-2\times0+2=0$

إذن : $A(-1;1;0)\,\epsilon\,(\mathcal{S})$

2 ب

ليكن $(\mathcal{P})$ المستوى المماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في النقطة $A(-1;1;0)$.
بما أن مركز الفلكة $(\mathcal{S})$ هو $\Omega(0;2;-1)$ فإن المتجهة
$\overrightarrow{\Omega A}(-1;-1;1)$ منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$.
إذن المعادلة الديكارتية للمستوى $(\mathcal{P})$ تكتب على الشكل التالي :

$(\mathcal{P}):\ -x-y+z+b=0$

و لتحديد قيمة المجهول b نعوض x و y و z بإحداثيات النقطة A

لأن : $A\,\epsilon\,(\mathcal{P})$

يعني : $A\,\epsilon\,(\mathcal{P})\ \Rightarrow 1-1+0+b=0\ \Longrightarrow b=0$

و بالتالي فالمعادلة الديكارتية للمستوى $(\mathcal{P})$ تصبح :

$$\boxed{(\mathcal{P}):\ -x-y+z=0}$$

3

لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ متجهة منظمية على المستوى (Q) .

إذن المعادلة الديكارتية للمستوى (Q) تكتب على الشكل التالي :

$(Q):\ x+y+z+c=0$

لدينا : $B(1;3;-2)\,\epsilon\,(Q)\ \Rightarrow 1+3-2+c=0\ \Longrightarrow c=-2$

إذن المعادلة الديكارتية للمستوى (Q) تصبح : $\boxed{(Q):\ x+y+z-2=0}$

التمرين الثاني:

1

نعتبر المعادلة التالية : $(E):\ z^2-4iz-4(1+i)=0$

لدينا : $\Delta=(-4i)^2+4\times4\times(1+i)$

$$\Delta=-16+16(1+i)=16i=8\times2i=8\times(2i-1+1)$$

$$=8(2i+i^2+1^2)=8(i+1)^2=\left(\sqrt{8}(1+i)\right)^2$$

إذن : $\boxed{\Delta=\left[2\sqrt{2}(1+i)\right]^2}$

و بالتالي حلا المعادلة z_1 و z_2 هما :

$$z_1=\frac{4i+2\sqrt{2}(1+i)}{2}=\left(2+\sqrt{2}\right)i+\sqrt{2}$$

$$z_2=\frac{4i-2\sqrt{2}(1+i)}{2}=\left(2-\sqrt{2}\right)i-\sqrt{2}$$

2

لدينا :

$$z_1=\left(2+\sqrt{2}\right)i+\sqrt{2}=2i+\sqrt{2}(1+i)=a+b$$

$$z_2=\left(2-\sqrt{2}\right)i-\sqrt{2}=2i-\sqrt{2}(1+i)=a-b$$

$$a=2i=2(0+1i)=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2e^{\frac{i\pi}{2}}$$

$$b=\sqrt{2}(1+i)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2e^{\frac{i\pi}{4}}$$

3 أ

لدينا : $a=2e^{\frac{i\pi}{2}}$ و $b=2e^{\frac{i\pi}{4}}$.

إذن : $|a|=\left|2e^{\frac{i\pi}{2}}\right|=2$ و $|b|=\left|2e^{\frac{i\pi}{4}}\right|=2$.

نلاحظ أن : $|a|=|b|$ إذن : $|a-0|=|b-0|$ أي : $OA=OB$

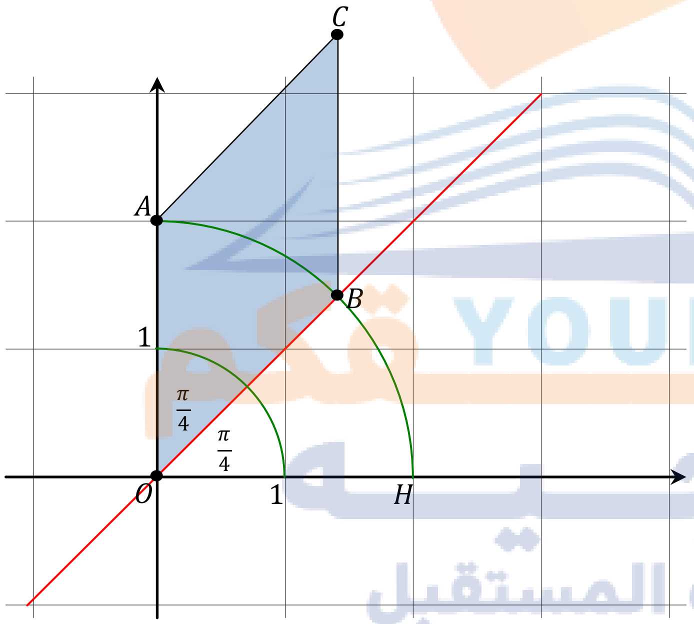
و لدينا كذلك $z_1=a+b$ إذن : $(z_1-0)=(a-0)+(b-0)$.

يعني : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ أي : $OACB$ متوازي أضلاع .

نرسم إذن النقطة A باستعمال الإحداثيات الديكارتية $A(0;2)$

و نرسم النقطة B باستعمال المسافة $OB=2$ و الزاوية $B\hat{O}A=\frac{\pi}{4}$.

ثم نرسم النقطة C باستعمال المعلومة : $OACB$ متوازي أضلاع .



3 ب

بما أن $OACB$ متوازي أضلاع فإن كل ضلعين متقابلين فيه متقايسان .

يعني أن : $AC=OB$ وكذلك $OA=BC$.

و نعلم حسب السؤال أ) أن : $OA=OB$.

إذن نستنتج أن : $BC=OA=OB=AC$.

و هذا يعني أن جميع أضلاع الرباعي $OACB$ متقايسة. إذن فهو معين .

لدينا حسب الشكل : $\arg(z_1) \equiv H\hat{O}C\ [2\pi]$.

و لدينا كذلك : $\boxed{H\hat{O}C = H\hat{O}B + B\hat{O}C}$ (■)

نعلم أن : $\arg(b) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ إذن : $H\hat{O}B = \frac{\pi}{4}$.

و لدينا كذلك $OACB$ معين إذن قطراه متعامدان

و هذا يعني أن $[OC)$ هو منصف الزاوية $B\hat{O}A = \frac{\pi}{4}$.

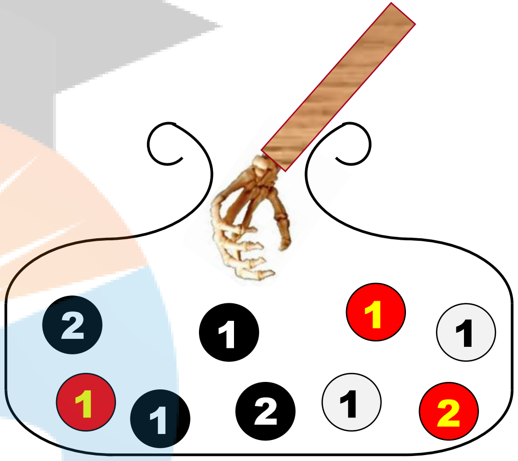
إذن : $B\hat{O}C = C\hat{O}A = \frac{\pi}{8}$.

إذن بالرجوع إلى النتيجة (■) نستنتج أن : $H\hat{O}C = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$.

و بالتالي : $\boxed{\arg(z_1) \equiv \frac{3\pi}{8}\ [2\pi]}$.

التمرين الثالث :

1



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث بيدقات من كيس يحتوي على 9 بيدقات فإن هذه التجربة العشوائية تحتمل C_9^3 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_9^3 = 84$ بحيث Ω هو كون امكانيات هذه التجربة العشوائية .

$$p(A) = p\begin{pmatrix}\text{ثلاث بيدقات}\\ \text{مختلفة اللون}\end{pmatrix} = p\begin{pmatrix}\text{بيدقة حمراء}\\ \text{و بيدقة سوداء}\\ \text{و بيدقة بيضاء}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{C_3^1 \times C_4^1 \times C_2^1}{card(\Omega)} = \frac{3 \times 4 \times 2}{84} = \boxed{\frac{2}{7}}$$

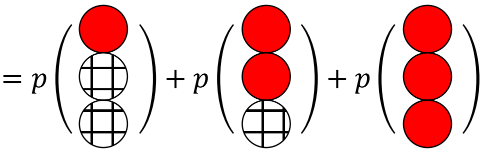
$$p(B) = p\begin{pmatrix}\text{ثلاث بيدقات}\\ \text{تحمل نفس}\\ \text{الرقم}\end{pmatrix} = p\begin{pmatrix}\text{ثلاث بيدقات} & & \text{ثلاث بيدقات}\\ \text{تحمل الرقم 2} & \text{أو} & \text{تحمل الرقم 1}\end{pmatrix}$$

$$= p\begin{pmatrix}\text{ثلاث بيدقات}\\ \text{تحمل الرقم 1}\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}\text{ثلاث بيدقات}\\ \text{تحمل الرقم 2}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{C_6^3}{84} + \frac{C_3^3}{84} = \frac{20}{84} + \frac{1}{84} = \frac{21}{84} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$p(C) = p\begin{pmatrix}\text{من بين البيدقات}\\ \text{الثلاث توجد واحدة}\\ \text{حمراء على الأقل}\end{pmatrix}$$

$$= p\begin{pmatrix}\text{ثلاث} & & \text{بيدقتان حمراوين} & & \text{بيدقة حمراء}\\ \text{بيدقات} & \text{أو} & \text{و الأخرى تخالف} & \text{أو} & \text{و الأخريين}\\ \text{حمراء} & & \text{الأحمر} & & \text{يخالفان الأحمر}\end{pmatrix}$$



$$= \frac{C_3^1 \times C_6^2}{84} + \frac{C_3^2 \times C_6^1}{84} + \frac{C_3^3}{84} = \frac{45}{84} + \frac{18}{84} + \frac{1}{84} = \frac{64}{84} = \boxed{\frac{16}{21}}$$

توجد طريقة أخرى لحساب $p(C)$ و هي استعمال تقنية الحدث المضاد.

و التي نعبر عنها بالعلاقة التالية : $p(C) = 1 - p(\bar{C})$

لدينا : الحدث C هو الحصول على الأقل على بيدقة حمراء .

إذن : الحدث $\bar{C}$ هو الحصول على ثلاث بيدقات تخالف كلها اللون الأحمر .

لدينا : ———————————

$$p(\bar{C}) = p\begin{pmatrix}\text{البيدقات الثلاث}\\ \text{تخالف كلها اللون}\\ \text{الأحمر}\end{pmatrix}$$

$$= p\begin{pmatrix}\text{بيدقة سوداء} & & \text{بيدقتان سوداوين} & & \text{البيدقات الثلاث}\\ \text{و الأخريان} & \text{أو} & \text{و الأخرى} & \text{أو} & \text{كلها سوداء}\\ \text{بيضاوين} & & \text{المتبقية بيضاء} & & \text{اللون}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{C_4^3}{84} + \frac{C_4^2 C_2^1}{84} + \frac{C_4^1 C_2^2}{84} = \frac{4}{84} + \frac{12}{84} + \frac{4}{84} = \frac{20}{84} = \boxed{\frac{5}{21}}$$

إذن : $\boxed{p(\bar{C}) = \frac{5}{21}}$

و منه : $p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{5}{21} = \boxed{\frac{16}{21}}$

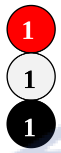
2

الحدث $A \cap B$ هو : " البيدقات الثلاث المسحوبة مختلفة اللون و تحمل كلها نفس الرقم " .

بما أن الصندوق لا يضم بيدقات تحمل الرقم 2 فإن الحدث $A \cap B$ يتجلى في حالة واحدة و هي الحصول على ثلاث بيدقات مختلفة اللون و تحمل كلها الرقم 1 .

و بالتالي :

$$p(A \cap B) = p(A \text{ و } B) = p\begin{pmatrix}\text{كرة حمراء تحمل الرقم 1}\\ \text{و كرة بيضاء تحمل الرقم 1}\\ \text{و كرة سوداء تحمل الرقم 1}\end{pmatrix}$$

$= p\Bigg($ 

$\Bigg) = \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_2^1}{84} = \frac{8}{84} = \boxed{\frac{2}{21}}$

التمرين الرابع :

I 1 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا :

$$\boxed{1 - \frac{1}{e^x + 1}} = \frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x(e^x + 1)} = \boxed{\frac{1}{1 + e^{-x}}}$$

I 1 ب

$$f(-x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{-x} + 1} = 1 + \frac{1}{2}x - 2\left(1 - \frac{1}{e^{-x} + 1}\right)$$

$$= -1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{1 + e^x} = -\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{1 + e^x}\right) = -f(x)$$

إذن : $\boxed{(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(-x) = -f(x)}$

و هذا يعني أن الدالة f دالة فردية و تمثيلها المبياني متماثل بالنسبة لأصل المعلم

I 2

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\right) = 1-(+\infty)-\frac{2}{\infty}$$
$$= 1-\infty-0 = \boxed{-\infty}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ (1)

I 3 أ

ليكن x عددا حقيقيا . لدينا : $f(x) = 1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$ إذن :

$$f'(x) = -\frac{1}{2}-2\left(\frac{1}{e^x+1}\right)' = -\frac{1}{2}-2\left(\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}+\frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{-(e^{2x}+2e^x+1)+4e^x}{2(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-(e^{2x}-2e^x+1)}{2(e^x+1)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

إذن : ——— $\boxed{(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2}$

I 3 ب

لدينا : ——— $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

نلاحظ أن : ——— $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \geq 0$

إذن : ——— $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \leq 0$

و منه : ——— $\boxed{(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x)\leq 0}$

إذن f دالة تناقصية على $\mathbb{R}$.

و لدينا : ——— $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

و نظيف كذلك نهاية الدالة f بجوار $-\infty$ نجد :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\right) = 1+\infty-\frac{2}{e^{-\infty}+1}$$
$$= 1+\infty-\frac{2}{0+1} = 1+\infty-2 = \boxed{+\infty}$$

إذن : ——— $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

إذن : نلخص النتائج المحصل عليها في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

I 3 ج

ليكن x عنصرا من المجال $[0;+\infty[$ يعني : $x\geq 0$.

بما أن f دالة تناقصية على $\mathbb{R}$ فإن : $(\forall x\geq 0)\ ;\ f(x)\leq f(0)$.

يعني : $\forall\ x\ \epsilon\ [0;+\infty[\ ;\ f(x)\leq 0$

إذن : ——— $\forall\ x\ \epsilon\ [0;+\infty[\ ;\ 1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\leq 0$

و بالتالي : $\boxed{\forall\ x\ \epsilon\ [0;+\infty[\ ;\ 1-\frac{2}{e^x+1}\leq\frac{1}{2}x}$

I 4

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{e^x+1}\right) = \frac{-2}{e^{+\infty}+1} = 0$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right) = 0}$

يعني : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{1}{2}x\right) = 1}$ (2)

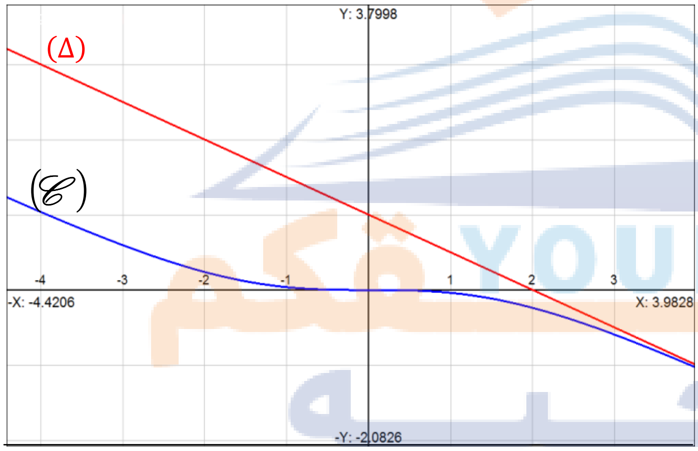
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{2}{xe^x+x}\right) = 0-\frac{1}{2}-\frac{2}{+\infty} = \frac{-1}{2}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{-1}{2}}$ (3)

من النهايات (1) و (2) و (3) نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $(\Delta) : y = \frac{-1}{2}x+1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

I 5

التمثيل المبياني للدالة f و المستقيم (Δ) .



I 6 أ

$$\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{1+e^x}\right)dx = \int_{-1}^{0}\left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)dx = -\int_{-1}^{0}\frac{(e^{-x}+1)'}{(e^{-x}+1)}dx$$
$$= -[\ln(e^{-x}+1)]_{-1}^{0} = -(\ln 2-\ln(e+1))$$
$$= -\left(\ln 2-\ln\left(\frac{1}{e+1}\right)\right) = -\ln\left(\frac{2}{e+1}\right) = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

و بالتالي : $\boxed{\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{1+e^x}\right)dx = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}$

طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

I 6 ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين ذوا المعادلتين $x=-1$ و $x=0$.

نعلم أن التكامل يقيس هندسيا طول أو مساحة أو حجم . إذن :

$$\mathcal{A}=\int_{-1}^{0}|f(x)|\,dx$$

نريد الآن تحديد إشارة $f(x)$ على المجال $]-\infty;0]$.

لدينا : $\forall\, x \in\,]-\infty;0]\ ;\ x\le 0$

إذن : $\forall\, x \in\,]-\infty;0]\ ;\ f(x)\ge f(0)$

و ذلك لأن f دالة تناقصية على $\mathbb{R}$ بأكمله .

و منه : $\forall\, x \in\,]-\infty;0]\ ;\ f(x)\ge 0$

أي : $\forall\, x \in\,]-\infty;0]\ ;\ |f(x)|=f(x)$

إذن بالرجوع إلى المساحة $\mathcal{A}$ نكتب :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}&=\int_{-1}^{0}|f(x)|\,dx=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\right)dx\\&=\int_{-1}^{0}1\,dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}x\,dx-2\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{e^x+1}\right)dx\\&=[x]_{-1}^{0}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}-2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)\\&=\frac{5}{4}-2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)\end{aligned}$$

II 1

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n)\ :\ (\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_n>0$

لدينا : $1>0$ إذن : $u_0>0$ و منه العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_n>0$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,e^{u_n}>1$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,e^{u_n}+1>2$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \dfrac{1}{e^{u_n}+1}<\dfrac{1}{2}$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \dfrac{2}{e^{u_n}+1}<1$

و منه : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1-\dfrac{2}{e^{u_n}+1}>0$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_{n+1}>0$

إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

و بالتالي : نحصل على النتائج التالية : $\boxed{\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\(P_n)\Rightarrow(P_{n+1})\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}}$

و من هاتين النتيجتين نستنتج حسب مبدأ الترجع : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_n>0}$

II 2 أ

حصلنا من خلال السؤال I 3 ج على النتيجة $(*)$ التالية :

$$\boxed{\forall\, x\in[0;+\infty[\ ;\ 1-\frac{2}{e^x+1}\le\frac{1}{2}x}\ (*)$$

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_n>0$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_n\in\,]0;+\infty[$

و هذا يعني أننا نستطيع تطبيق النتيجة $(*)$ من أجل $x=u_n$.

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1-\dfrac{2}{e^{u_n}+1}\le\dfrac{1}{2}u_n$

و منه : $(**)\ \boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n}$

II 2 ب

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_n>0$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\,;\,\frac{1}{2}u_n<u_n$

و منه حسب النتيجة $(**)$: $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{2}u_n<u_n$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<u_n$

و هذا يعني أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية .

II 3

الطريقة الأولى :

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{2}u_n$

إذن من أجل $n-1$ نحصل على : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n\le\dfrac{1}{2}u_{n-1}$

$$u_n\le\frac{1}{2}u_{n-1}\le\frac{1}{2}\frac{1}{2}u_{n-2}\le\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}u_{n-3}\le\cdots\le\left(\frac{1}{2}\right)^n u_{n-n}$$

يعني : $u_n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u_0$ أي : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

الطريقة الثانية : (الترجع)

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n)\ :\ (\forall n\in\mathbb{N})\,;\,u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا : $1\le1$ إذن : $u_0\le\left(\frac{1}{2}\right)^0$ يعني أن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ إذن : $e^{u_n}\le e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

يعني : $\dfrac{2}{e^{u_n}+1}\ge\dfrac{2}{e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1}$ أي : $\left(1-\dfrac{2}{e^{u_n}+1}\right)\le\left(1-\dfrac{2}{e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1}\right)$

إذن : $(1)\ \boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}\le\left(1-\frac{2}{e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1}\right)}$

و نعلم أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \left(\frac{1}{2}\right)^n\ge0$

إذن نستطيع تطبيق نتيجة السؤال I 3 ج من أجل $x=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

نحصل إذن على : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \left(1-\dfrac{2}{e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1}\right)\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

أي : $(2)\ \boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \left(1-\frac{2}{e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1}\right)\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

من (1) و (2) نستنتج بكل سهولة أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة و بالتالي نحصل على ما يلي :

$$\boxed{\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\(P_n)\ \Rightarrow\ (P_{n+1})\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}}$$

حسب مبدأ الترجع نستنتج أن : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

و بما أن $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و هو عدد موجب و أصغر من 1

فإن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ و منه : $\underset{\searrow\,0}{0}\le u_n\le\underset{\searrow\,0}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}u_n=0}$

جمعية طريقكم لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل YOUR WAY

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية **2004**

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

مادة الرياضيات
العلوم التجريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجية بمسلكيها
مدة الانجاز **3h** - المعامل **7**

التمرين الأول : (2,5 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n^3}{3u_n^2+1} \ ; \ (\forall n\in\mathbb{N}) \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

0,50 ن | 1 | أ | بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n > 0$

0,50 ن | 1 | ب | بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية .

0,25 ن | 1 | ج | استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة .

0,50 ن | 2 | أ | بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} < \frac{1}{3}u_n$

0,75 ن | 2 | ب | استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ثم أحسب النهاية : $\lim\limits_{n\infty} u_n$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط $A(1,2,-2)$ و $B(0,3,-3)$ و $C(1,1,-2)$ و المستوى $(\mathcal{P})$ الذي معادلته : $(\mathcal{P}) \ : \ x+y-3=0$

0,50 ن | 1 | أ | أحسب مسافة النقطة $\Omega(0,1,-1)$ عن المستوى $(\mathcal{P})$.

1,00 ن | 1 | ب | استنتج أن $x^2+y^2+z^2-2y+2z=0$ معادلة ديكارتية للفلكة $(\mathcal{S})$ التي مركزها $\Omega(0,1,-1)$ و المماسة للمستوى $(\mathcal{P})$.

0,75 ن | 2 | أ | حدد $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية.

0,50 ن | 2 | ب | بين أن : $x-z-3=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

0,25 ن | 3 | أ | تحقق من أن الفلكة $(\mathcal{S})$ مماسة للمستوى (ABC) .

0,50 ن | 3 | ب | أحسب المسافة ΩC و استنتج نقطة تماس الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى (ABC) .

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E) : 2z^2-2iz-1=0$

0,75 ن | 1 | أ | حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) (z_1 و z_2 هما حلا المعادلة بحيث : $\Re e(z_1) > 0$)

0,50 ن | 1 | ب | أكتب الحلين z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

2 | في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ نعتبر النقط A و B و S التي ألحاقها هي على التوالي: $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ و $b=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i$ و $s=i$

0,75 ن | 2 | أ | أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي : $\dfrac{a-s}{b-s}$

0,50 ن | 2 | ب | استنتج أن المثلث SAB متساوي الساقين و قائم الزاوية في S .

0,50 ن | 2 | ج | بين أن الرباعي $OASB$ مربع.

التمرين الرابع : (3,0 ن)

يحتوي كيس $\mathcal{U}_1$ على بيدقتين تحملان الرقم 1 و على أربع بيدقات تحمل الرقم 2 (و لا يمكن التمييز بينها باللمس) .

و يحتوي كيس $\mathcal{U}_2$ على ثلاث كرات حمراء و أربع كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)
نسحب عشوائيا بيدقة واحدة من الكيس $\mathcal{U}_1$.

1,00 ن **1** أحسب احتمال كل من الحدثين التاليين :

A : " البيدقة المسحوبة تحمل الرقم 1 "

B : " البيدقة المسحوبة تحمل الرقم 2 "

2 نعتبر في هذا السؤال التجربة العشوائية التالية : " نسحب بيدقة واحدة من الكيس $\mathcal{U}_1$ و نسجل رقمها. إذا كان هذا الرقم 1 نقوم بسحب كرة واحدة من الكيس $\mathcal{U}_2$ و إذا كان 2 نسحب كرتين في آن واحد من $\mathcal{U}_2$.

ليكن n عدد الكرات الحمراء المسحوبة من الكيس $\mathcal{U}_2$
و الحدث E_n : " الحصول بالضبط على n كرة حمراء ."

1,50 ن **2 أ** بين أن : $p(E_1)=\frac{11}{21}$ و $p(E_2)=\frac{2}{21}$.

0,50 ن **2 ب** أحسب احتمال الحدث A علما أن الحدث E_1 محقق.

التمرين الخامس : (8,0ن)

ليكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $\boxed{f(x)=\ln(x^2-2x+2)}$

0,25 ن **1 أ** تحقق من أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ :\ x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

0,75 ن **1 ب** استنتج أن f معرفة على $\mathbb{R}$ ثم أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

0,50 ن **2** بين أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ :\ f(2-x)=f(x)$ ثم استنتج أن المستقيم الذي معادلته $x=1$ محور تماثل للمنحنى $(\mathscr{C})$.

0,50 ن **3 أ** تحقق من أن : $\forall\ x\ \epsilon[1;+\infty[\ ;\ f(x)=2\ln x+\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$

0,50 ن **3 ب** استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ ثم أول هندسيا هذه النتيجة.

1,00 ن **4** بين أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}$ إعط جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

1,00 ن **5** بين أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f''(x)=\frac{2x(2-x)}{[(x-1)^2+1]^2}$ أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C})$

0,75 ن **6** أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$.

7 ليكن h قصور الدالة f على المجال $[1\,;+\infty[$

0,50 ن **7 أ** بين أن h تقابل من المجال $[1\,,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده.

0,50 ن **7 ب** حدد : $h^{-1}(y)$ لكل y من J

0,50 ن **8 أ** بوضع $t=x-1$ بين أن : $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_{-1}^0\ln(1+t^2)\,dt$

0,50 ن **8 ب** باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_{-1}^0\ln(1+t^2)\,dt=\ln 2-2\int_{-1}^0\frac{t^2}{1+t^2}dt$

0,50 ن **8 ج** بين أن : $\int_{-1}^0\frac{t^2}{1+t^2}dt=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ (لاحظ أن : $((\forall t\epsilon\mathbb{R})\,;\,\frac{t^2}{1+t^2}=1-\frac{1}{1+t^2}$)

0,25 ن **8 د** استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي : $x=-1$ و $x=0$.

طريقكم YOUR WAY لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

أجوبة امتحان الدورة الاستدراكية 2004

التمرين الأول :

1 أ

سوف نستعمل في هذا السؤال البرهان بالترجع .

لدينا $1>0$ إذن من أجل $n=0$ لدينا $u_0>0$.

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$ إذن $(u_n)^3>0$ و $3u_n^2+1>1$

و هذا يعني أن الكميتين (u_n^3) و $(3u_n^2+1)$ موجبتين .

و منه الكمية $\left(\frac{u_n^3}{3u_n^2+1}\right)$ موجبة كذلك باعتبارها خارج كميتين موجبتين .

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \frac{u_n^3}{3u_n^2+1}>0$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}>0$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$

1 ب

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{u_n^3}{3u_n^2+1}-u_n = \frac{u_n^3-u_n(3u_n^2+1)}{(3u_n^2+1)}$$

$$= \frac{u_n^3-3u_n^3-u_n}{3u_n^2+1} = -\left(\frac{2u_n^3+u_n}{3u_n^2+1}\right)$$

نعلم أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 2u_n^3+u_n>0$ و $3u_n^2+1>0$

و منه : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \left(\frac{2u_n^3+u_n}{3u_n^2+1}\right)>0$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}-u_n<0$

و بالتالي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<u_n$

و هذا يعني أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ تناقصية .

1 ج

علما أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$. إذن $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ مصغورة بالعدد 0 .

و بما أنها تناقصية و مصغورة بالعدد 0 فإنها متقاربة .

2 أ

لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{u_n^2}{3u_n^2+1}$

نريد أن نبرهن على أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \frac{u_n^2}{3u_n^2+1}<\frac{1}{3}$

لدينا : $1>0$ نضيف إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $3u_n^2$ نحصل على : $3u_n^2+1>3u_n^2$

إذن : $\frac{1}{3u_n^2+1}<\frac{1}{3u_n^2}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة u_n^2 نحصل على :

$$\frac{u_n^2}{3u_n^2+1}<\frac{1}{3}$$

و بالتالي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{1}{3}$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{3}u_n$

2 ب

لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{3}u_n$

$$u_n<\frac{1}{3}u_{n-1}<\frac{1}{3}\frac{1}{3}u_{n-2}<\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}u_{n-3}<\cdots<\left(\frac{1}{3}\right)^n u_{n-n}$$

و بالتالي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^n u_0$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n<\left(\frac{1}{3}\right)^n$

من جهة ثانية لدينا $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ و هو عدد حقيقي أصغر من 1

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

و بما أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0<\underset{\infty\searrow 0}{u_n}<\underset{\infty\searrow 0}{\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}}$

فإن : $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى الصفر .

يعني : $\lim\limits_{n\infty}u_n=0$

التمرين الثاني :

1 أ

لدينا حسب المعطيات : $\begin{cases}(\mathcal{P}): 1x+1y-3=0\\ \Omega(0\,;1\,;-1)\end{cases}$

إذن : $d(\Omega;(\mathcal{P}))=\frac{|1\times0+1\times1-3|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

1 ب

لدينا $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(0;1;-1)$ و مماسة للمستوى $(\mathcal{P})$.

إذن شعاع الفلكة $(\mathcal{S})$ يساوي : $r=d(\Omega\,;(\mathcal{P}))=\sqrt{2}$.

و بالتالي : المعادلة الديكارتية للفلكة $(\mathcal{S})$ في هذه الحالة تكتب على الشكل التالي : $(\mathcal{S}):\ (x-0)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$

يعني : $(\mathcal{S}):\ x^2+y^2-2y+1+z^2+2z+1=2$

يعني : $(\mathcal{S}):\ x^2+y^2+z^2-2y+2z=0$

2 أ

لدينا : $A(1;2;-2)$ و $B(0;3;-3)$ و $C(1;1;-2)$.

إذن : $\overrightarrow{AB}(-1;1;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0;-1;0)$.

إذن :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&0\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}-1&0\\-1&0\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}-1&0\\1&-1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-\vec{\imath}+0\vec{\jmath}+\vec{k}$$

و بالتالي : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$

نعلم أن استقامية متجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ يعني $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.

و بما أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فإن : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتان غير مستقيميتان

و منه فإن النقط A و B و C غير مستقيمية .

YOUR WAY طريق
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

2 ب

نعلم أن النقط A و B و C غير مستقيمية .

إذن فهذه النقط تشكل المستوى (ABC) الذي إحدى متجهاته المنظمية

نجد المتجهة $\vec{n} := \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-1;0;1)$

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستوى $(\mathcal{P})$.

لدينا :

$$M\epsilon(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$$
$$\Leftrightarrow -1(x-1)+0(y-2)+1(z+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow -x+1+z+2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x-z-3 = 0$$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

3 أ

لدينا : $\Omega(0;1;-1)$ و $(ABC) : x+0y-z-3 = 0$.

$$d(\Omega\,;(ABC)) = \frac{|1\times 0+0\times 1-1(-1)-3|}{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2} = r$$

و بما أن : $d(\Omega\,,(ABC)) = r$ فإن $(\mathcal{S})$ مماسة للمستوى (ABC)

2 ب

لدينا : $\Omega(0;1;-1)$ و $C(1;1;-2)$

إذن : $\Omega C = \sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2+(-2+1)^2} = \sqrt{2} = r$

و من النتيجة $\Omega C = r$ نستنتج أن : $\boxed{C\,\epsilon\,(\mathcal{S})}$ **(1)**

و نعلم أن : $\boxed{C\,\epsilon\,(ABC)}$ **(2)**

إذن من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن النقطة C نقطة مشتركة بين الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى (ABC) .

و بما أن الفلكة $(\mathcal{S})$ مماسة للمستوى (ABC) .

فإن C هي النقطة المشتركة الوحيدة بين الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى (ABC)

و بالتالي : C هي نقطة تماس الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى (ABC) .

التمرين الثالث :

1 أ

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) : 2z^2-2iz-1 = 0$

لدينا : $\Delta = (-2i)^2-4\times 2\times(-1) = -4+8 = 4$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين عقديين و بحيث :

$\boxed{z_1 = \frac{2i+2}{4} = \frac{1}{2}i+\frac{1}{2}}$ و $\boxed{z_2 = \frac{2i-2}{4} = \frac{1}{2}i-\frac{1}{2}}$

1 ب

نضع : $z_1 = re^{i\theta} = \frac{1}{2}i+\frac{1}{2}$

إذن : $r = |z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

و منه : $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta} = \frac{1}{2}i+\frac{1}{2}$

و منه : $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+i\sin\theta) = \frac{1}{2}i+\frac{1}{2}$

إذن : $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta = \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

نستنتج إذن أن : $\theta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ و بالتالي : $\boxed{z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}$

و بنفس الطريقة نضع : $z_2 = se^{i\varphi} = \frac{1}{2}i-\frac{1}{2}$

إذن : $s = |z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

و منه : $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\varphi} = \frac{1}{2}i-\frac{1}{2}$

و منه : $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi+i\sin\varphi) = \frac{1}{2}i-\frac{1}{2}$

إذن : $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi = \frac{-1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi = \frac{1}{2}\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}\cos\varphi = \frac{-\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

إذن : $\begin{cases}\cos(\pi-\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\pi-\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

نستنتج إذن أن : $\pi-\varphi \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ يعني : $\varphi \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

و بالتالي : $\boxed{z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i3\pi}{4}}}$

2 أ

نعتبر النقط $S(i)$ و $B\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$ و $A\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$.

لدينا :

$$\frac{a-s}{b-s} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-i}{\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i-i} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}i} = \frac{\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

إذن : $\boxed{\frac{a-s}{b-s} = e^{\frac{i\pi}{2}}}$

2 ب

حصلنا على : $\frac{a-s}{b-s} = e^{\frac{i\pi}{2}}$ إذن : $\begin{cases}\left|\frac{a-s}{b-s}\right| = 1\\ arg\left(\frac{a-s}{b-s}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}|a-s| = |b-s|\\ (\overrightarrow{SB};\overrightarrow{SA}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}SA = SB\\ (\overrightarrow{SB};\overrightarrow{SA}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\end{cases}$

و بالتالي : SAB مثلث متساوي الساقين رأسه S و قائم الزاوية في S

2 ج

لدينا :

$$OA = |a-0| = |z_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$AS = |s-a| = \left|i-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$SB = |b-s| = \left|\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i-i\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$BO = |0-b| = \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

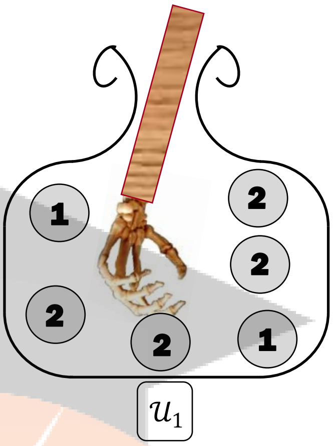
إذن : $OA = AS = SB = BO$

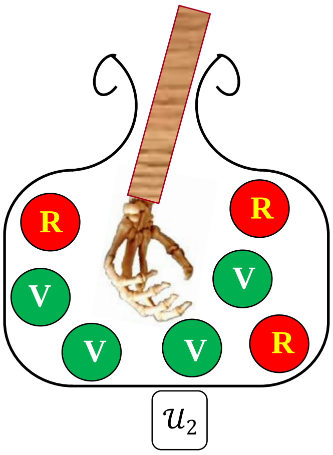
و هذا يعني أن الرباعي $OASB$ معين لأن جميع أضلاعه متقايسة .

و بما أن إحدى زواياه قائمة و ذلك حسب نتيجة السؤال 2) ب) فإنه مربع .

التمرين الرابع :

1





عندما نسحب بيدقة من الكيس $\mathcal{U}_1$ فإنه يمكن الحصول على C_6^1 نتيجة ممكنة

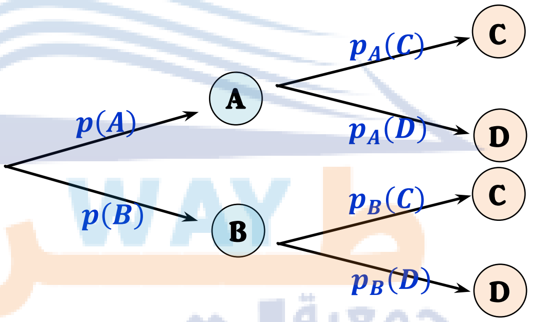
يعني : $card(\Omega) = C_6^1 = 6$ بحيث Ω هو كون الإمكانيات .

إذن : $P(A) = P(\text{①}) = \frac{card(\text{①})}{card(\Omega)} = \frac{C_2^1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

و كذلك : $P(B) = P(\text{②}) = \frac{card(\text{②})}{card(\Omega)} = \frac{C_4^1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2

تذكير : نعتبر شجرة الاحتمالات التالية :



يجب على كل تلميذ التمرن جيدا على انجاز هذه الشجرة انطلاقا من التجربة العشوائية التي يطرحها التمرين . و من ثم استخراج العلاقات التالية انطلاقا من تلك الشجرة .

المجموعة الأولى

$$\begin{cases} P(A\cap C) = P(A)\times P_A(C) \\ P(A\cap D) = P(A)\times P_A(D) \\ P(B\cap C) = P(B)\times P_B(C) \\ P(B\cap D) = P(B)\times P_B(D) \end{cases}$$

المجموعة الثانية

$$\begin{cases} P(C) = P(A\cap C) + P(B\cap C) \\ P(D) = P(A\cap D) + P(B\cap D) \end{cases}$$

و انطلاقا من هاتين المجموعتين نستطيع حساب احتمال أي حدث كيفما كان نوعه و شكله .(انتهى التذكير)

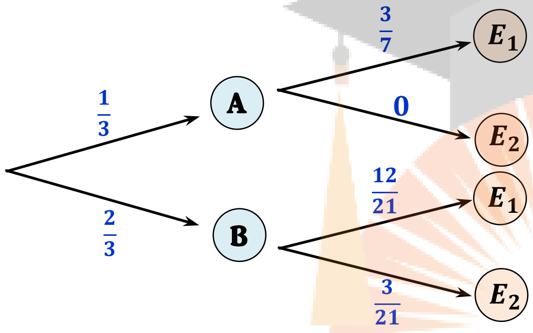
2 أ

بالعودة إلى التجربة الواردة في هذا التمرين نحصل على شجرة الاحتمالات أسفله و التي تضم الأحداث A و B و E_1 و E_2

نحتاج في البداية إلى حساب احتمالات بعض الأحداث الأساسية :

$$\begin{cases} P_A(E_1) = \frac{C_3^1}{C_7^1} = \frac{3}{7} \\ P_B(E_1) = \frac{C_3^1\times C_4^1}{C_7^2} = \frac{12}{21} \\ P_A(E_2) = \frac{0}{C_7^2} = 0 \\ P_B(E_2) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} P(A) = \frac{1}{3} \\ P(B) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

نحصل إذن على شجرة الاحتمالات التالية :



انطلاقا من هذه الشجرة نحسب احتمالي الحدثين E_1 و E_2 كما يلي :

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(A\cap E_1) + P(B\cap E_1) \\ &= P(A)\times P_A(E_1) + P(B)\times P_B(E_1) \\ &= \frac{1}{3}\times\frac{3}{7} + \frac{2}{3}\times\frac{12}{21} = \frac{1}{7} + \frac{8}{21} = \boxed{\frac{11}{21}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P(A\cap E_2) + P(B\cap E_2) \\ &= P(A)\times P_A(E_2) + P(B)\times P_B(E_2) \\ &= \frac{1}{3}\times 0 + \frac{2}{3}\times\frac{3}{21} = \boxed{\frac{2}{21}} \end{aligned}$$

2 ب

المطلوب في هذا السؤال هو حساب $P_{E_1}(A)$

لدينا : $P_{E_1}(A) = \frac{P(A\cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(A)\cdot P_A(E_1)}{P(E_1)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}}{\frac{11}{21}} = \frac{3}{11}$

التمرين الخامس :

1 أ

ليكن x عددا حقيقيا . لدينا : $(x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 1$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$

1 ب

نعلم أن مربع أي عدد حقيقي يكون دائما موجبا .

يعني : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}) :\ (x-1)^2 \geq 0$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}) :\ (x-1)^2 + 1 \geq 1$

يعني : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}) :\ x^2 - 2x + 2 \geq 1$

و منه : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}) : \ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0$

و بالتالي : الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بأكمله و بأقلاشه.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2-2x+2)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln((x-1)^2+1) = \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=(x-1)}} \ln(t^2+1) = +\infty$$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2-2x+2)$

$$= \lim_{x\to-\infty} \ln((x-1)^2+1) = \lim_{\substack{t\to-\infty \\ t=(x-1)}} \ln(t^2+1) = +\infty$$

2

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا :
$$\begin{aligned} f(2-x) &= \ln((2-x)^2-2(2-x)+2) \\ &= \ln[(2-x)^2-2(2-x)+2] \\ &= \ln[x^2-2x+2] = f(x) \end{aligned}$$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ :\ f(2-x) = f(x)$.

تذكير : يكون المستقيم $x = a$ محور تماثل للتمثيل المبياني لدالة إذا كان :

$$\begin{cases} (\forall x \epsilon \mathcal{D}_f)\ ;\ (a+x)\ \epsilon\ \mathcal{D}_f \text{ و } (a-x)\ \epsilon\ \mathcal{D}_f \\ (\forall x \epsilon \mathcal{D}_f)\ ;\ f(a+x) = f(a-x) \end{cases}$$

لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(2-x) = f(x)$

إذن من أجل $(1-x)$ نحصل على : $f(2-(1-x)) = f(1-x)$

يعني : $f(1+x) = f(1-x)$

و بالتالي : المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تماثل للمنحنى $(\mathscr{C})$

3 أ

لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(x) = \ln(x^2-2x+2)$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(x) = \ln\left(x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)$

يعني : $(\forall x \geq 1)\ ;\ f(x) = \ln(x^2) + \ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$

يعني : $(\forall x \geq 1)\ ;\ f(x) = 2\ln(x) + \ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$

3 ب

لدينا :
$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x + \ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x} \\ &= 2\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x} \end{aligned}$$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ إذن :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} \times \frac{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x} \\ &= \left(\frac{0}{1}\right) \times \left(\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)\right) = 0 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}\ (1)$

إضافة إلى ذلك حصلنا فيما سبق على النهاية : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}\ (2)$

إذن : من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل

4

لدينا الدالة f عبارة عن مركب دالتين φ و ψ بحيث :

$$\begin{cases} f(x) = \psi o \varphi(x) \\ \psi(x) = \ln x \\ \varphi(x) = x^2-2x+2 \end{cases}$$

و لدينا حسب السؤال 1) أ) : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ \varphi(x) = (x-1)^2+1$

و نعلم أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ (x-1)^2 \geq 0$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ (x-1)^2+1 \geq 1$

و منه : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ \varphi(x) \geq 1$

يعني : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ \varphi(x)\ \epsilon\ [1\ ;+\infty[$

إذن : $\varphi(\mathbb{R}) \subset [1;+\infty[$

و بالتالي : الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأن φ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

و ψ قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و $\varphi(\mathbb{R}) \subset [1;+\infty[$.

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $f'(x) = (\psi \circ \varphi(x))'$

$$\begin{aligned} &= \varphi'(x) \cdot \psi'(\varphi(x)) = (2x-2) \cdot \frac{1}{\varphi(x)} \\ &= \frac{2(x-1)}{x^2-2x+2} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1} \end{aligned}$$

من خلال نتيجة هذا السؤال حصلنا إذن على ما يلي :

$$(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}$$

في البداية نلاحظ أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ (x-1)^2+1 \geq 0$

إذن : إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(x-1)$.

إذا كان : $x = 1$ فإن : $f'(x) = 0$.

إذا كان : $x > 1$ فإن : $f'(x) > 0$.

إذا كان : $x < 1$ فإن : $f'(x) < 0$.

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

5

لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}$

إذن f' دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و منه : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f''(x) = 2\left(\frac{x-1}{(x-1)^2+1}\right)'$

$$\begin{aligned} &= 2\left(\frac{1[(x-1)^2+1]-(x-1)(2x-2)}{[(x-1)^2+1]^2}\right) \\ &= 2\left(\frac{x^2-2x+1+1-2x^2+2x+2x-2}{[(x-1)^2+1]^2}\right) \\ &= 2\left(\frac{-x^2+2x}{[(x-1)^2+1]^2}\right) = 2\left(\frac{x(2-x)}{[(x-1)^2+1]^2}\right) \\ &= \boxed{\frac{2x(2-x)}{[(x-1)^2+1]^2}} \end{aligned}$$

YOUR WAY
جمعية طريق التوجيه و إرشاد شباب المستقبل

لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f''(x) = \dfrac{2x(2-x)}{[(x-1)^2+1]^2}$

و نلاحظ أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ [(x-1)^2+1]^2 > 0$.

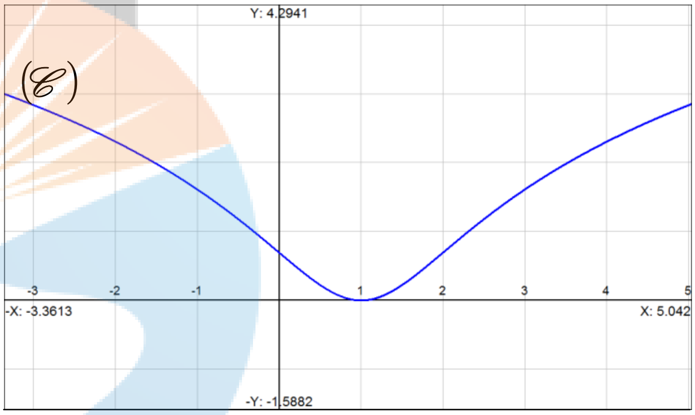
إذن إشارة $f''(x)$ تتعلق بإشارة التعبير $x(2-x)$

نستنتج إذن جدول التقعر التالي :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$(2-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
طبيعة المنحنى $(\mathscr{C})$		$(\mathscr{C})$ مقعر	نقطة انعطاف	$(\mathscr{C})$ محدب	نقطة انعطاف	$(\mathscr{C})$ مقعر	

6

التمثيل المبياني للدالة f .



7 أ

ليكن h قصور الدالة f على المجال $[1;+\infty[$.

يعني : $(\forall x \geq 1)\ ;\ h(x) = \ln(x^2-2x+2)$

لدينا حسب جدول التغيرات السابق : f دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[1;+\infty[$ إذن h دالة متصلة و تزايدية قطعا على $[1;+\infty[$

و منه h تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو المجال $h([1;+\infty[)$.

و لدينا : $h([1;+\infty[) = \left[h(1);\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right[= [0;+\infty[$

و بالتالي : h تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو المجال $[0;+\infty[$.

7 ب

ليكن y عنصرا من المجال $[0;+\infty[$.

بما أن h تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $[0;+\infty[$.

فإن : $\exists!\ x \epsilon [1;+\infty[\ ;\ h(x) = y$

يعني : $\exists!\ x \epsilon [1;+\infty[\ ;\ \ln(x^2-2x+2) = y$

يعني : $\exists!\ x \epsilon [1;+\infty[\ ;\ x^2-2x+2 = e^y$

يعني : $\exists!\ x \epsilon [1;+\infty[\ ;\ (x-1)^2+1 = e^y$

يعني : $\exists!\ x \epsilon [1;+\infty[\ ;\ (x-1)^2 = e^y-1$

بما أن : $x \geq 1$ فإن : $(x-1) \geq 0$

إذن : $x-1 = \sqrt{e^y-1}$ يعني : $x = \sqrt{e^y-1}+1$.

و بالتالي فإن التطبيق h^{-1} معرف بما يلي :

$$\begin{aligned} h^{-1}\ :\ [0;+\infty[\ &\to\ [1;+\infty[\\ y\ &\to\ \sqrt{e^y-1}+1 \end{aligned}$$

أو بتعبير آخر : $\forall\ y \epsilon [0;+\infty[\ :\ h^{-1}(y) = \sqrt{e^y-1}+1$

8 أ

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \ln(x^2-2x+2)\,dx = \int_0^1 \ln((x-1)^2+1)\,dx$$

نضع : $t = x-1$ إذن : $dt = dx$.

إذا كان : $x = 0$ فإن : $t = -1$. و إذا كان : $x = 1$ فإن : $t = 0$

و بالتالي : $\displaystyle\int_0^1 \ln((x-1)^2+1)\,dx = \int_{-1}^0 \ln(t^2+1)\,dt$

يعني : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 \ln(t^2+1)\,dt$

8 ب

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \ln(t^2+1)\,dt &= \int_{-1}^0 \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(1+t^2)}_{v}\,dt = [uv] - \int uv' \\ &= [t\ln(1+t)^2]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (t)\cdot\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)dt \\ &= \ln 2 - 2\int_{-1}^0 \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)dt \end{aligned}$$

و بالتالي : $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(1+t^2)\,dt = \ln 2 - 2\int_{-1}^0 \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)dt$

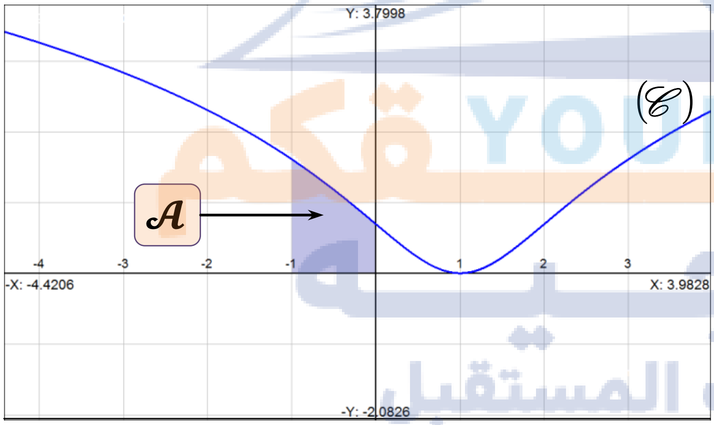
8 ج

لدينا : $(\forall t \epsilon \mathbb{R})\ :\ \dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-1}^0 \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)dt &= \int_{-1}^0 \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt \\ &= \int_{-1}^0 (1)\,dt - \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt \\ &= [t]_{-1}^0 - [Arctan(t)]_{-1}^0 \\ &= 1 - \left(0-\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = \boxed{\left(1-\frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

8 د

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي : $x = 1$ و $x = 0$.



نحسب المساحة $\mathcal{A}$ باستعمال التكامل التالي : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$

و بما أن : $(\forall t \geq 0)\,;\, 1+t^2 \geq 1$ فإن : $\ln(1+t^2) \geq 0$

و هذا يعني أن : $(\forall t \geq 0)\ ;\ |f(x)| = f(x)$

و بالعودة إلى حساب المساحة نجد :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_{-1}^0 \ln(t^2+1)\,dt \\ &= \ln 2 - 2\int_{-1}^0 \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)dt = \boxed{\ln 2 - 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

الإمتحـــــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريـــــــــا
الدورة العـــــــادية 2005

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

مـــادة الريـــــــاضيات
العلوم التجـــــريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجـــية بمسلكيها
مدة الانجـاز 3h - المعامل 7

التمرين الأول : (4,5 ن)

1 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2-2(1+2i)z+1+4i=0$ — 1,00 ن

2 بين أن : $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}=1$ — 1,00 ن

3 باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\displaystyle\int_1^e x^2\ln x\,dx=\frac{2e^3+1}{9}$ — 1,00 ن

4 بين أن : $\displaystyle\frac{\pi}{6}=\int_2^4\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ (يمكن استعمال $t=\sqrt{x-1}$) . — 1,50 ن

التمرين الثاني : (2,5 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم الفلكة $(\mathcal{S})$
التي معادلتها : $(\mathcal{S}):\ (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=2$
و المستوى $(\mathcal{P})$ الذي معادلته : $(\mathcal{P}):x+y-3=0$.

1 بين أن المستوى $(\mathcal{P})$ مماس للفلكة $(\mathcal{S})$. — 1,00 ن

2 حدد مثلوث إحداثيات نقطة تماس المستوى $(\mathcal{P})$ و الفلكة $(\mathcal{S})$. — 1,50 ن

التمرين الثالث : (3 ن)

يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء و سبع كرات سوداء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)
نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق ، ليكن A و B الحدثين التاليين :
A : " الكرتان المسحوبتان لونهما أسود " .
B : " من بين الكرتين المسحوبتين توجد على الأقل كرة لونها أبيض " .

1 بين أن احتمال الحدث A يساوي $\dfrac{7}{15}$ و أن احتمال الحدث B يساوي $\dfrac{8}{15}$. — 1,25 ن

2 نعتبر التجربة العشوائية التالية : ' نسحب كرة واحدة من الصندوق ، إذا كانت بيضاء نتوقف عن السحب و إذا كانت سوداء نضعها جانبا ثم نسحب كرة ثانية و أخيرة من الصندوق .'
ليكن C و D الحدثين التاليين :
C : " الحصول على كرة بيضاء في السحبة الأولى " .
D : " الحصول على كرة بيضاء " .

2 أ أحسب احتمال الحدث C . — 0,75 ن

2 ب بين أن احتمال الحدث D يساوي $\dfrac{8}{15}$. — 1,00 ن

طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الرابع : (10 ن)

I نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على المجال $]0\,;\,+\infty[$ بما يلي :

$g(x) = x - 1 - \ln x$ و $h(x) = x + (x-2)\ln x$

I 1 أ : أحسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]0\,;\,+\infty[$ ثم أدرس منحنى تغيرات الدالة g . — 0,75 ن

I 1 ب : إستنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من المجال $]0\,;\,+\infty[$. — 0,25 ن

I 2 أ : بين أن : $h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x \;;\; (\forall\, x \,\epsilon\,]0\,;\,+\infty[)$. — 0,50 ن

I 2 ب : بين أن : $(x-1)\ln x \geq 0 \;;\; (\forall\, x \,\epsilon\,]0\,;\,+\infty[)$. — 0,50 ن

I 3 : استنتج أن : $h(x) > 0 \;;\; (\forall\, x \,\epsilon\,]0\,;\,+\infty[)$. — 0,50 ن

II نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0\,;\,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = 1 + x\,lnx - (\ln x)^2$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

II 1 أ : أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ثم أول النتيجة مبيانيا . — 0,50 ن

II 1 ب : أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ثم حدد الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$. — 1,00 ن

(لاحظ أن : $f(x) = 1 + x\ln x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$)

II 2 أ : بين أن : $f'(x) = \frac{h(x)}{x} \;;\; (\forall\, x \,\epsilon\,]0\,;\,+\infty[)$. — 0,50 ن

II 2 ب : استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $]0\,;\,+\infty[$. — 0,25 ن

II 3 : ليكن (Δ) المستقيم المماس للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة $A(1\,,1)$

II 3 أ : بين أن $y = x$ معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) . — 0,50 ن

II 3 ب : تحقق من أن : $f(x) - x = (\ln x - 1)g(x) \;;\; (\forall\, x \,\epsilon\,]0\,;\,+\infty[)$. — 0,50 ن

II 3 ج : أدرس إشارة $f(x) - x$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) . — 1,00 ن

II 4 : أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) في نفس المعلم . — 0,75 ن

(نقبل أن للمنحنى نقطة انعطاف أفصولها محصور بين 1 و 1,5).

III نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \;;\; \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = \sqrt{e} \end{cases}$$

III 1 : بين بالترجع أن : $1 \leq u_n \leq e \;;\; (\forall n\epsilon\mathbb{N})$ — 0,50 ن

III 2 : بين أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ تناقصية (يمكنك استعمال نتيجة السؤال II 3 ج) — 1,00 ن

III 3 : استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متقاربة ثم أحسب نهايتها . — 1,00 ن

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

أجوبة امتحان الدورة العادية 2005

التمرين الأول :

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2 - 2(1+2i)z + 1 + 4i = 0$

لدينا :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(-2(1+2i)\right)^2 - 4(1+4i)\\ &= 4(1-4+4i) - 4 - 16i\\ &= 4 - 16 + 16i - 4 - 16i\\ &= -16 = (4i)^2\end{aligned}$$

إذن : المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 المعرفين بما يلي :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{2(1+2i) - 4i}{2} = 1 \\ z_2 = \dfrac{2(1+2i) + 4i}{2} = 1 + 4i \end{cases}$$

2

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^{12}\\ &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{12} = \left(e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^{12} = e^{\frac{i\,12\pi}{6}}\\ &= e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}\int_1^e \underbrace{x^2}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v}\,dx &= \left[\frac{x^3\ln x}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e\\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right)\\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}\end{aligned}$$

4

نريد أن نحسب التكامل التالي : $\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ باستعمال تقنية تغيير المتغير .

نضع : $t = \sqrt{x-1}$ إذن : $x = t^2 + 1$

و لدينا كذلك : $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2t}$ إذن : $dx = 2t \cdot dt$

إذا كان : $x = 2$ فإن : $t = 1$

إذا كان : $x = 4$ فإن : $t = \sqrt{3}$

إذن التكامل يصبح :

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t\,dt}{t(t^2+1)}\\ &= 2\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2\left[Arctan(t)\right]_1^{\sqrt{3}}\\ &= 2\left(Arctan(\sqrt{3}) - Arctan(1)\right)\\ &= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

التمرين الثاني :

1

لدينا : $(\mathcal{S}) : (x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$

إذن الفلكة $(\mathcal{S})$ مركزها هو النقطة $\Omega(1;0;1)$ و شعاعها $r = \sqrt{2}$.

لدينا : $(\mathcal{P}) : x + y - 3 = 0$

إذن : $d\left(\Omega, (\mathcal{P})\right) = \dfrac{|1+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = r$

إذن المستوى $(\mathcal{P})$ مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة $H(\alpha;\beta;\gamma)$.

2

لدينا : $(\mathcal{P}) : x + y - 3 = 0$

إذن $\vec{n}(1;1;0)$ متجهة منظمية على $(\mathcal{P})$ و لها نفس منحى المتجهة $\overrightarrow{\Omega H}$.

بما أن $(\mathcal{P})$ مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في النقطة H فإن : (ΩH) عمودي على $(\mathcal{P})$.

و منه فإن المتجهتان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{\Omega H}$ مستقيميتان .

يعني أنه يوجد عدد حقيقي t بحيث : $\overrightarrow{\Omega H} = t \cdot \vec{n}$

يعني : $\begin{pmatrix}\alpha - 1\\ \beta - 0\\ \gamma - 1\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ يعني : $\begin{cases}\alpha - 1 = t\\ \beta - 0 = t\\ \gamma - 1 = 0\end{cases}$

يعني : $(1)\begin{cases}\alpha = t + 1\\ \beta = t\\ \gamma = 1\end{cases}$

و بما أن : $H \epsilon (\mathcal{S})$ فإن $(\alpha-1)^2 + \beta^2 + (\gamma-1)^2 = 2$

يعني : $(t+1-1)^2 + t^2 + (1-1)^2 = 2$

يعني : $2t^2 = 2$ يعني : $t^2 = 1$

إذن : $t = 1$ أو $t = -1$.

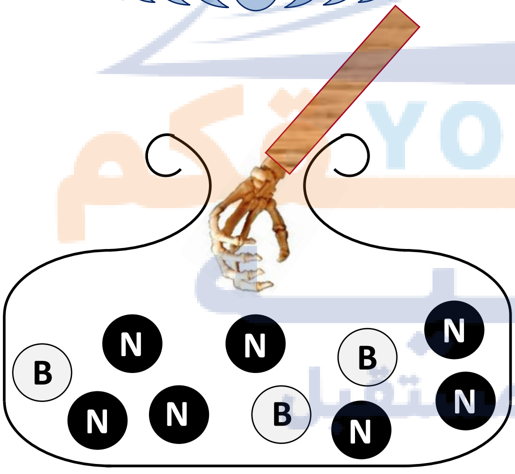
نحتفظ بالقيمة $t = 1$ لأن المتجهتان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{\Omega H}$ لهما نفس المنحى .

نعوض $t = 1$ في النظمة (1) نحصل على : $\begin{cases}\alpha = 2\\ \beta = 1\\ \gamma = 1\end{cases}$

و بالتالي : $H(2;1;1)$ هي نقطة تماس الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى $(\mathcal{P})$.

التمرين الثالث :

1



عندما نسحب كرتين في آن واحد من صندوق يحتوي على 10 كرات فإنه توجد C_{10}^2 نتيجة ممكنة . يعني : $card(\Omega) = C_{10}^2 = 45$.

بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

لنحسب $p(A)$: $p(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_7^2}{C_{10}^2} = \dfrac{21}{45} = \dfrac{7}{15}$

YOUR WAY

لنحسب $p(B)$: و من أجل ذلك أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى :

لدينا : $B = \{$ من بين الكرتين المسحوبتين توجد على الأقل واحدة بيضاء $\}$

إذن :
$$p(B) = p\left(\text{كرة بيضاء و الأخرى سوداء} \text{ أو } \text{كرتان بيضاوين}\right)$$
$$= p\left(\text{كرة بيضاء و الأخرى سوداء}\right) + p\left(\text{كرتان بيضاوين}\right)$$
$$= \frac{C_3^1 C_7^1}{C_{10}^2} + \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{21}{45} + \frac{3}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

الطريقة الثانية :

لدينا : $B = \{$ من بين الكرتين المسحوبتين توجد على الأقل واحدة بيضاء $\}$

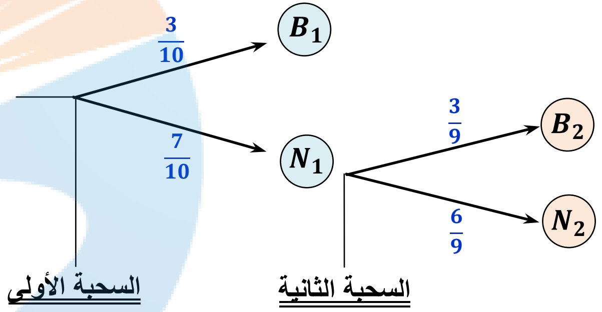
إذن : $\bar{B} = \{$ الكرتان المسحوبتان سوداوين $\}$.

و بالتالي : $p(B) = 1 - p(\bar{B})$

أي :
$$p(B) = 1 - \frac{card(\bar{B})}{card(\Omega)} = 1 - \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = 1 - \frac{21}{45} = \frac{8}{15}$$

2 أ

نحول التجربة العشوائية الواردة في السؤال إلى شجرة الاحتمالات التالية :



بحيث : نرمز بـ B للكرة البيضاء و بـ N للكرة السوداء .

لدينا :
$$p(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^1}{C_{10}^1} = \frac{3}{10}$$

2 ب

و لدينا كذلك من خلال الشجرة السابقة :
$$p(D) = p(B_1) + p(N_1 \cap B_2) = p(B_1) + p(N_1) \cdot p_{N_1}(B_2)$$
$$= \frac{3}{10} + \frac{C_7^1}{C_{10}^1} \times \frac{C_3^1}{C_9^1} = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{8}{15}$$

التمرين الرابع :

I 1 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $g(x) = x - 1 - \ln x$

إذن : $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

بما أن : $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; x > 0$

فإن إشارة $g'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(x-1)$.

نحتاج كذلك إلى حساب النهايتين التاليتين : $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} (x - 1 - \ln x) = 0 - 1 - \ln(0^+)$$
$$= -1 - (-\infty) = -1 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x - 1 - \ln x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$$
$$= (+\infty)(1 - 0 - 0) = (+\infty)$$

نستنتج إذن من ذلك كله جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

I 1 ب

للإجابة على هذا السؤال أقترح عليكم طريقتين :

الطريقة الأولى :

لدينا : g دالة متصلة على $]0;+\infty[$ و ذلك من خلال جدول تغيراتها .

و لدينا g تناقصية على $]0;1]$ و تزايدية على $[1;+\infty[$ بحيث $g(1) = 0$

إذن : 0 قيمة دنوية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

يعني : $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; f(x) \geq 0$

الطريقة الثانية :

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

هذا يعني أن $x \in]0;1]$ أو $x \in [1;+\infty[$

في حالة $x \in]0;1]$ لدينا : $x \leq 1$.

إذن : $g(x) \geq g(1)$ لأن g دالة تناقصية على المجال $]0;1]$.

إذن نحصل على : $\boxed{\forall x \in]0;1] \; ; \; g(x) \geq 0}$ (1)

و في حالة $x \in [1;+\infty[$ لدينا $x \geq 1$

إذن : $g(x) \geq g(1)$ لأن g دالة تزايدية على $[1;+\infty[$.

نحصل إذن على : $\boxed{\forall x \in [1;+\infty[\; ; \; g(x) \geq 0}$ (2)

و من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; g(x) \geq 0$.

I 2 أ

ليكن x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $1 + g(x) + (x-1)\ln x$
$$= 1 + (x - 1 - \ln x) + (x-1)\ln x$$
$$= x - \ln x + x\ln x - \ln x = x + (x-2)\ln x = h(x)$$

إذن : $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x$

I 2 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$ و نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : $x \in]0;1]$

هذا يعني أن : $x \leq 1$ و منه : $\ln x \leq 0$ و $(x-1) \leq 0$

إذن : $\ln x$ و $(x-1)$ كميتان سالبتان .

و منه : $(x-1)\ln x$ كمية موجبة .

يعني : $\boxed{\forall x \in]0;1] \; ; \; (x-1)\ln x \geq 0}$ (1)

الحالة الثانية : $x \in [1;+\infty[$

يعني : $x \geq 1$ و منه $\ln x \geq 0$ و $(x-1) \geq 0$.

يعني أن : $\ln x$ و $(x-1)$ كميتان موجبتان

و منه $(x-1)\ln x$ كمية موجبة كذلك.

يعني : $\boxed{\forall x \in [1;+\infty[\; ; \; (x-1)\ln x \geq 0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; (x-1)\ln x \geq 0$

I 3

لدينا حسب السؤال 2) أ) : $h(x) = \underbrace{1}_{\text{كمية موجبة منذ ولادتها}} + \underbrace{g(x)}_{\text{كمية موجبة على }]0;+\infty[\text{ حسب السؤال 1) أ)}} + \underbrace{(x-1)\ln x}_{\text{كمية موجبة على }]0;+\infty[\text{ حسب السؤال 2) ب)}}$

إذن : $h(x)$ كمية موجبة على المجال $]0;+\infty[$.

يعني أن : $\forall\, x \in\,]0;+\infty[\;;\; h(x) > 0$

II 1 أ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(1 + x\ln x - (\ln x)^2\right)$$

$$0^+ \searrow 1 \qquad 0^+ \searrow 0^- \qquad 0^+ \searrow (-\infty)^2$$

$$= 1 + 0 - (-\infty)^2 = 1 - (+\infty) = -\infty$$

حصلنا إذن على : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

و هذا يدل مبيانيا على أن المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (يعني محور الاراتيب) مقارب عمودي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار النقطة ذات الأفصول 0

II 1 ب

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + x\ln x - (\ln x)^2\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)\left(x\ln x\right)\right)$$

$$+\infty \searrow 0^+ \qquad +\infty \searrow +\infty$$

$$= 1 + (1-0)(+\infty) = +\infty$$

و لدينا كذلك : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x} + \ln x - \dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\ln x} + 1 - \frac{\ln x}{x}\right)\ln x$$

$$+\infty \searrow 0^+ \qquad +\infty \searrow 0^+ \qquad +\infty \searrow +\infty$$

$$= (0 + 1 - 0)(+\infty) = (+\infty)$$

حصلنا إذن على : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

إذن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب .

II 2 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا :

$$f'(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2 = (x\ln x)' - 2(\ln x)(\ln x)'$$

$$= (\ln x + 1) - \frac{2\ln x}{x}$$

$$= \frac{1}{x}(x\ln x + x - 2\ln x) = \frac{1}{x}h(x)$$

و بالتالي : $\forall\, x \in\,]0;+\infty[\;;\; f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$

II 2 ب

علمنا من خلال السؤال I) 3) أن : $\forall\, x \in\,]0;+\infty[\;;\; h(x) > 0$

إذن : $\forall\, x \in\,]0;+\infty[\;;\; \dfrac{h(x)}{x} > 0$

و منه حسب السؤال II) 2) أ) : $\forall\, x \in\,]0;+\infty[\;;\; f'(x) > 0$

و بالتالي : f دالة تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

II 3 أ

نعلم أن المعادلة الديكارتية للمماس (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في نقطة $(x_0;y_0)$ تكتب على الشكل : $(\Delta) \;:\; y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

ليكن (Δ) المماس للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة $A(1;1)$.

إذن : $(\Delta) \;:\; y = f'(1)(x-1) + f(1)$

يعني : $(\Delta) \;:\; y = 1(x-1) + 1$

يعني : $(\Delta) \;:\; y = x$

II 3 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا :

$$(\ln x - 1)g(x) = (\ln x - 1)(x - 1 - \ln x)$$

$$= x\ln x - \ln x - (\ln x)^2 - x + 1 + \ln x$$

$$= x\ln x - (\ln x)^2 - x + 1$$

$$= \left(1 + x\ln x - (\ln x)^2\right) - x$$

$$= f(x) - x$$

II 3 ج

من خلال السؤال ب) حصلنا على ما يلي :

$\forall\, x \in\,]0;+\infty[\;;\; f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$

إذن إشارة $f(x) - x$ تتعلق بإشارة $(\ln x - 1)g(x)$.

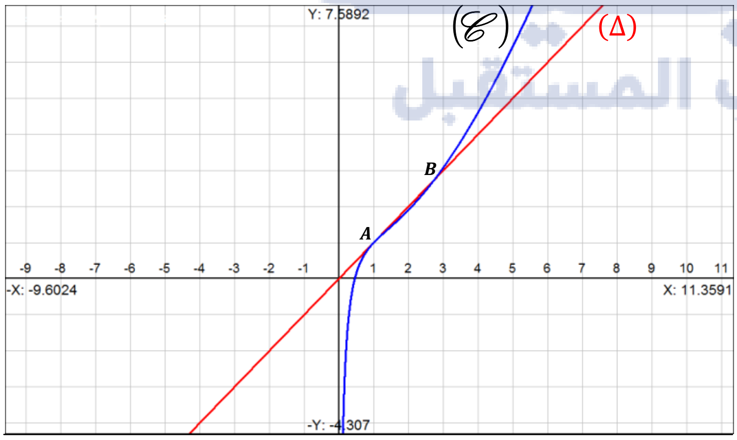
و بما أن : $\forall\, x \in]0;+\infty[\;;\; g(x) \geq 0$

فإن إشارة $f(x) - x$ تتعلق فقط بإشارة $(\ln x - 1)$.

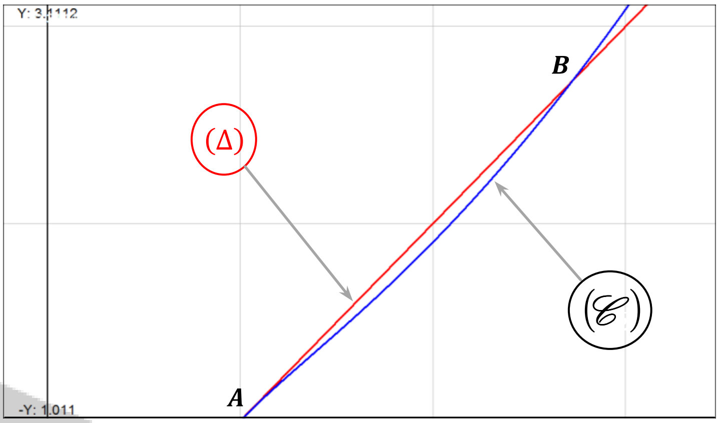
و يمثل الجدول التالي أهم مراحل دراسة إشارة $f(x) - x$ ثم الوضع النسبي لـ (Δ) و $(\mathscr{C})$

x	0	e	$+\infty$
$\ln(x) - 1$	$-$	0	$+$
$f(x) - x$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي لـ $(\mathscr{C})$ و (Δ)	$(\mathscr{C})$ أسفل (Δ)	$(\mathscr{C})$ و (Δ) يتقاطعان في النقطة $B(e,e)$	$(\mathscr{C})$ فوق (Δ)

II 4



و أضيف الرسم المكبر التالي لنرى ما يحدث بين النقطتين A و B



III 1

لنبين بالترجع على أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1\le u_n\le e \quad (*)$

لدينا : $1\le e\le e^2$ إذن : $1\le\sqrt{e}\le e$ يعني : $1\le u_0\le e$

إذن العبارة $(*)$ صحيحة من أجل $n=0$.

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1\le u_n\le e$

إذن : $u_n\ \epsilon\ [1;e]\ \subset\ ]0;+\infty[$

و منه : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ f(1)\le f(u_n)\le f(e)$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1\le u_{n+1}\le e$

إذن العبارة $(*)$ صحيحة من أجل $(n+1)$.

و بالتالي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1\le u_n\le e$

III 2

لدينا حسب الجدول الوارد في جواب السؤال II) 3) ج) .

$$\forall x\ \epsilon\ ]0;e]\ ;\ f(x)-x\le 0$$

يعني : $\boxed{\forall x\ \epsilon\ ]0;e]\ ;\ f(x)\le x}\ (\star)$

من جهة أخرى لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1\le u_n\le e$

هذا يعني أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n\ \epsilon\ [1;e]$

و بما أن : $[1;e]\subset\ ]0;e]$ فإن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n\ \epsilon\ ]0;e]$

إذن بإمكاننا تطبيق النتيجة $(\star)$ نحصل على : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ f(u_n)\le u_n$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}\le u_n$

من هذه النتيجة الأخيرة نستنتج أن : $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

III 3

لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1\le u_n\le e$

إذن : $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية مصغورة بالعدد 1 .

و بما أنها تناقصية و مصغورة فإنها متقاربة و نهايتها ℓ تحقق : $f(\ell)=\ell$

يعني : $\ell=e$ أو $\ell=1$.

و بما أن : $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ تناقصية فإن : $\ell=1$.

طريقكم YOUR WAY التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

الامتحـــــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريـــــــــا
الدورة الاستدراكية 2005

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

مـــادة الريــــاضيات
العلوم التجـــريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجــية بمسلكيها
مدة الانجاز 3h - المعامل 7

التمرين الأول : (4,0 ن)

1 حل المعادلة التفاضلية : $(H) \; : \; y'' + y' - 6y = 0$ — 1,00 ن

2 أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي : $z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$ — 1,00 ن

3 باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \ln(1 + \cos x)\, dx = \frac{\pi}{2} - 1$ — 1,00 ن

(نذكر أن : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$)

نضع : $u_n = n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \; ; \; (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$.

4 أحسب بدلالة n المجموع S_n التالي : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ — 1,00 ن

التمرين الثاني : (2,0 ن)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم، نعتبر المستوى $(\mathcal{P})$ الذي معادلته $x - z + 1 = 0$ و الفلكة $(\mathcal{S})$ التي مركزها $\Omega(1,0,0)$ و شعاعها $R = 2$.

1 بين أن $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{S})$ يتقاطعان وفق دائرة (Γ) . — 0,50 ن

2 حدد مركز و شعاع الدائرة (Γ) . — 1,50 ن

التمرين الثالث : (2,5 ن)

1 أكتب على الشكل الجبري العدد العقدي $(1 - i)^2$. — 0,25 ن

2 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2(1 + 2i)z - (3 - 6i)$. — 0,75 ن

3 نعتبر في المستوى العقدي النقطتين $A(3i)$ و $B(2 + i)$ ، حدد ثم أنشئ مجموعة (D) النقط $M(z)$ التي تحقق : $|z - 3i| = |z - 2 - i|$. — 1,50 ن

التمرين الرابع : (3,5 ن)

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء و كرتين سوداوين لا يمكن التمييز بينها باللمس.

1 نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس ، ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء. — 0,50 ن

2 نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 5 كرات من الكيس ، ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء مرتين بالضبط. — 1,00 ن

3 نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال n كرة من الكيس.

3 أ بين أن احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل هو : $p = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ — 1,00 ن

3 ب ما هو العدد الأدنى من السحبات التي من أجلها $p \geq 0{,}999$. — 1,00 ن

التمرين الخامس : (8,0ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0\,;2[$ بما يلي : $\boxed{f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2-x}\right)}$

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.

☐	1	أ	أحسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.	1,00 ن
☐	1	ب	بين أن : $(\forall\, x \in\,]0;2[\,)\ ;\ f'(x) = \dfrac{2}{x(2-x)}$	0,75 ن
☐	1	ج	إعط جدول تغيرات الدالة f .	0,50 ن
☐	2	أ	بين أن النقطة $A(1,0)$ مركز تماثل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$	0,50 ن
☐	2	ب	أكتب معادلة ديكارتية للمماس (D) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة $A(1,0)$.	0,50 ن
☐	3	☐	نضع : $\forall\, x \in\,]0,2[\ ;\ \psi(x) = f(x) - x$	
☐	3	أ	بين أن : $\psi\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ و $\psi\left(\frac{7}{4}\right) > 0$ نأخذ : $\ln 3 \approx 1,1$ و $\ln 7 \approx 1,94$	0,50 ن
☐	3	ب	استنتج أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا α بحيث : $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{7}{4}$ و أول النتيجة مبيانيا.	0,75 ن
☐	4	أ	بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} .	0,50 ن
☐	4	ب	بين أن : $(\forall y \in \mathbb{R})\ ;\ f^{-1}(y) = \dfrac{2e^y}{1+e^y}$	0,50 ن
☐	5	☐	أنشئ في نفس المعلم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المنحنى $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ الممثل للدالة f^{-1} .	1,00 ن
☐	6	أ	أحسب التكامل التالي : $\displaystyle\int_0^\alpha \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) dx$	0,50 ن
☐	6	ب	أحسب مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ و محوري المعلم .	1,00 ن

YOUR WAY طريقتكم
جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

أجوبة امتحان الدورة الاستدراكية 2005

التمرين الأول :

1

لنحل المعادلة التفاضلية التالية : $(H) : y'' + y' - 6y = 0$

و من أجل ذلك نحل أولا معادلتها المميزة : $(C) : \ r^2 + z - 6 = 0$

لدينا : $\Delta = 1^2 + 4 \times 6 = 25$

إذن المعادلة (C) تقبل حلين حقيقيين r_1 و r_2 :

$$r_1 = \frac{-1-5}{2} = -3 \quad \text{و} \quad r_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$$

و منه فإن حل المعادلة (H) يكتب على شكل :

$$y = Ae^{-3x} + Be^{2x} \quad ; \quad (A,B) \,\epsilon\, \mathbb{R}^2$$

ملاحظة : لتحديد الثابتتين A و B نحتاج إلى الشروط البدئية و أقصد بها الوضعية البدئية y_0 و السرعة البدئية y'_0 .

2

لدينا :

$$\begin{aligned} z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right) &= \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{2} = (1+i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}} \end{aligned}$$

إذن :

$$z = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{3}}$$

3

لدينا :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos x}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(1+\cos x)}_{v}\, dx &= \left[\sin x \cdot \ln(1+\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-\sin x \cdot \sin x}{1+\cos x}\right) dx \\ &= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)\, dx \\ &= \left[x - \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - (0-0) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

و بالتالي :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \ln(1+\cos x)\, dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

4

لدينا :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \left(k + \left(\frac{1}{3}\right)^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

و بالتالي :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

التمرين الثاني :

1

لدينا :

$$\begin{cases} \Omega(1;0;0) \\ (\mathcal{P}) : x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

إذن :

$$d(\Omega, (\mathcal{P})) = \frac{|1-0+1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

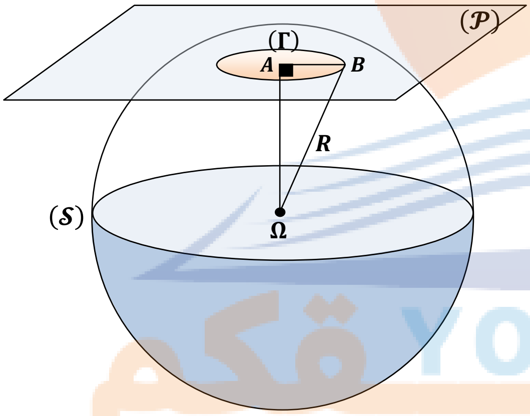
نعلم أن شعاع الفلكة $(\mathcal{S})$ هو $R = 2$

و نلاحظ أن : $\sqrt{2} < 2$ يعني : $d(\Omega; (\mathcal{P})) < R$.

إذن $(\mathcal{P})$ يقطع الفلكة $(\mathcal{S})$ وفق دائرة (Γ) مركزها A و شعاعها r .

2

لتحديد مركز و شعاع الدائرة (Γ) نستعين بالرسم التالي :



لنحدد أولا التمثيل البارامتري للمستقيم (ΩA) .

لدينا $(\mathcal{P})$ يقطع $(\mathcal{S})$ وفق الدائرة $\Gamma(A;r)$. إذن : $(\Omega A) \perp (\mathcal{P})$.

و لدينا : $(\mathcal{P}) : x + 0y - z + 1 = 0$

إذن المتجهة $\vec{n}(1;0;-1)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (ΩA) .

إذن : المتجهة $\overrightarrow{\Omega M}$ متجهة موجهة للمستقيم (ΩA) .

و بما أن : $(\Omega A) \perp (\mathcal{P})$ فإن المتجهتين $\vec{n}$ و $\overrightarrow{\Omega M}$ مستقيميتان .

يعني : $\overrightarrow{\Omega M} = t \cdot \vec{n} \quad ; \quad (\exists t \epsilon \mathbb{R})$

أي :

$$(\Omega A) : \begin{cases} x - 1 = t \\ y - 0 = 0 \\ z - 0 = -t \end{cases} \quad ; \quad (t \epsilon \mathbb{R})$$

يعني :

$$(\Omega A) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} \quad ; \quad (t \epsilon \mathbb{R})$$

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وارشاد شباب المستقبل

ليكن (α,β,γ) مثلوث إحداثيات النقطة A .

بما أن : $A \epsilon (\Omega A)$ و $A \epsilon (\mathcal{P})$ فإن : $(t\epsilon\mathbb{R})$;
$$\begin{cases} \alpha = t+1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -t \\ \alpha - \gamma + 1 = 0 \end{cases}$$

نعوض α و β و γ بالتعابير التي تضم t في آخر معادلة فنحصل على :
$$(t+1)-(-t)+1=0$$

يعني : $2t+2=0$ و منه : $t=-1$

إذن : $\alpha=0$ و $\beta=0$ و $\gamma=1$.

لتحديد الشعاع r نستعمل مبرهنة فيتاغورس في المثلث القائم الزاوية ΩAB نحصل على : $\Omega B^2 = \Omega A^2 + AB^2$.

إذن : $R^2 = \left(d\left(\Omega;\ (\mathcal{P})\right)\right)^2 + r^2$ يعني : $4 = 2 + r^2$

يعني : $r^2 = 2$ أي : $r = \sqrt{2}$

خلاصة : $(\mathcal{P})$ يقطع $(\mathcal{S})$ وفق دائرة (Γ) مركزها $A(0,0,1)$ و شعاعها $\sqrt{2}$

التمرين الثالث :

1

لدينا : $(1-i)^2 = 1^2 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

2

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2 - 2(1+2i)z - (3-6i) = 0$

لدينا :
$$\begin{aligned} \Delta &= [-2(1+2i)]^2 + 4(3-6i) \\ &= 4(1+4i-4) + 4(3-6i) \\ &= 4(4i-3) + 4(3-6i) \\ &= -8i = 4(-2i) = 4(1-i)^2 = [2(1-i)]^2 \end{aligned}$$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين كما يلي :
$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{2(1+2i) - 2(1-i)}{2} = 3i \\ z_2 = \dfrac{2(1+2i) + 2(1-i)}{2} = 2+i \end{cases}$$

3

لدينا : $A(3i)$ و $B(2+i)$ و $M(z)$.

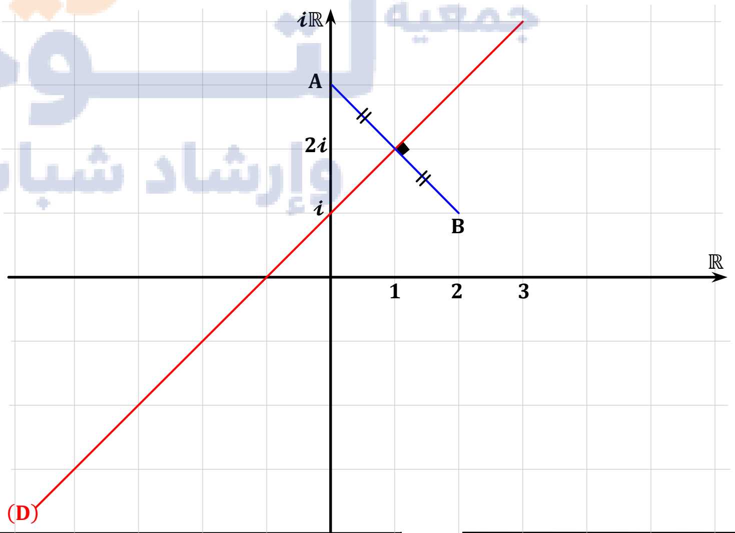
و لدينا : مجموعة النقط (D) تحقق العلاقة : $|z-3i| = |z-(2+i)|$

يعني : $|aff(M) - aff(A)| = |aff(M) - aff(B)|$

أي : $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\|$ يعني : $AM = BM$

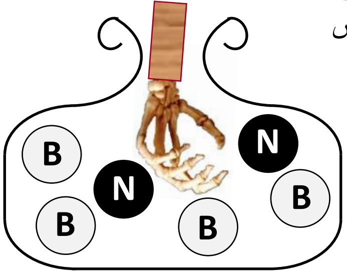
إذن مجموعة النقط M التي تحقق : $AB = BM$ هي واسط القطعة $[AB]$

و ذلك حسب الخاصية المميزة لواسط قطعة . و نرسم كما يلي :



التمرين الرابع :

1



عندما نسحب عشوائيا كرة واحدة من كيس يحتوي على 6 كرات فإن هذه التجربة العشوائية تحتمل C_6^1 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_6^1 = 6$

بحيث : Ω هو كون امكانيات هذه التجربة العشوائية .

إذن :
$$p\left(\begin{matrix}\text{الحصول}\\\text{على كرة}\\\text{بيضاء}\end{matrix}\right) = \frac{card\left(\begin{matrix}\text{الحصول}\\\text{على كرة}\\\text{بيضاء}\end{matrix}\right)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^1}{6} = \frac{2}{3}$$

2

تذكير : في تجربة عشوائية ، نعتبر حدثا A احتمال حدوثة p .

عندما نعيد (التكرار) نفس التجربة n مرة متتالية فإن احتمال وقوع الحدث A بالضبط k كرة هو : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ (انتهى التذكير)

عندما نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال (بإرجاع) خمس كرات من الكيس فإن هذه التجربة العشوائية يمكن قراءتها بالشكل التالي : " نسحب عشوائيا كرة من الكيس و نعيد هذه العملية (أو التجربة) خمس مرات متتالية .

إذن احتمال الحصول على كرة بيضاء مرتين بالضبط يساوي :
$$p\left(\begin{matrix}\text{كرتين}\\\text{بيضاوين}\\\text{بالضبط}\end{matrix}\right) = C_5^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^{5-2} = 10 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{27} = \frac{40}{243}$$

3 أ

عندما نسحب عشوائيا و بإحلال n كرة من الكيس فإن هذا يتلخص في إعادة عملية سحب كرة من الكيس n مرة متتالية .

و احتمال الحصول على كرة سوداء بالضبط يساوي :
$$p\left(\begin{matrix}\text{الحصول على}\\ n \text{ كرة سوداء}\\\text{بالضبط}\end{matrix}\right) = C_n^n\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(1-\frac{2}{3}\right)^{n-n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

و لدينا :
$$\left(\begin{matrix}\text{الحصول على كرة}\\\text{بيضاء واحدة}\\\text{على الأقل}\end{matrix}\right) = \overline{\left(\begin{matrix}\text{الحصول على}\\ n \text{ كرة سوداء}\\\text{بالضبط}\end{matrix}\right)}$$

إذن حسب تعريف احتمال الحدث المضاد نكتب :
$$p\left(\begin{matrix}\text{الحصول على كرة}\\\text{بيضاء واحدة}\\\text{على الأقل}\end{matrix}\right) = 1 - p\left(\begin{matrix}\text{الحصول على}\\ n \text{ كرة سوداء}\\\text{بالضبط}\end{matrix}\right) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

3 ب

نبحث عن العدد الأدنى n من السحبات التي من أجلها $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \geq 0{,}999$

يعني : $\left(\frac{1}{3}\right)^n \geq 1 - 0{,}999$ يعني : $10^{-3} \geq 3^{-n}$

يعني : $\ln(10^{-3}) \geq \ln(3^{-n})$ يعني : $-3\ln 10 \geq -n\ln 3$

يعني : $\frac{3\ln 10}{\ln 3} \leq n$ يعني : $6{,}28 \leq n$

إذن أصغر عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي $6{,}28$ هو 7 .

و هذا يعني أنه عندما ننجز 7 سحبات فإن احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل يكون أكبر من أو يساوي $0{,}999$.

أو بتعبير علمي دقيق نقول : تزداد حظوظنا في الحصول على كرة بيضاء على الأقل انطلاقا من السحبة السابعة فما فوق .

التمرين الخامس :

1 أ

لدينا :
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \ln\left(\frac{x}{2-x}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{2-0^+}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{2}\right) = \ln(0^+) = -\infty$$

إذن :
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$$

و لدينا كذلك :
$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \ln\left(\frac{x}{2-x}\right) = \ln\left(\frac{2^-}{2-2^-}\right) = \ln\left(\frac{2^-}{0^+}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

إذن :
$$\lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty$$

1 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;2[$. لدينا : $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$

إذن :
$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{2-x}\right)'}{\left(\frac{x}{2-x}\right)} = \frac{\frac{(2-x)+x}{(2-x)^2}}{\left(\frac{x}{2-x}\right)} = \frac{(2-x)+x}{(2-x)^2} \times \left(\frac{x}{2-x}\right) = \frac{2}{x(2-x)}$$

و بالتالي :
$$\forall\, x \in\,]0,2[\ ;\ f'(x) = \frac{2}{x(2-x)}$$

1 ج

لدينا : $2-x>0$ و $x>0$; $\forall\, x \in\,]0;2[$.

إذن : $\forall\, x \in\,]0,2[\ ;\ \frac{2}{x(2-x)} > 0$

يعني : $\forall\, x \in\,]0;2[\ ;\ f'(x) > 0$

إذن f دالة تزايدية قطعا على المجال $]0;2[$.

نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		2
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

2 أ

لدينا $(\mathscr{C}_f)$ هو مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق : $y = f(x)$.

يعني : $y = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$ نضع : $X = 1-x$ و $Y = y$.

إذن $(\mathscr{C}_f)$ هو مجموعة النقط (X,Y) التي تحقق : $Y = \ln\left(\frac{1-X}{1+X}\right) = \varphi(X)$

لدينا :
$$\varphi(-X) = \ln\left(\frac{1+X}{1-X}\right) = -\ln\left(\frac{1-X}{1+X}\right) = -\varphi(X)$$

نستنتج إذن أن : $\varphi(-X) = -\varphi(X)$ أي φ دالة فردية .

إذن $(\mathscr{C}_f)$ متماثل بالنسبة للنقطة $(X,Y) = (0,0)$.

يعني : $(1-x\,,y) = (0,0)$ أي : $(x,y) = (1,0)$

و بالتالي : النقطة $A(1,0)$ مركز تماثل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

2 ب

نعلم أن المعادلة الديكارتية للمماس (D) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة ذات الأفصول x_0 تكتب بصفة عامة على الشكل :

$(D)\ :\ y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

من أجل $x_0 = 1$ لدينا : $(D)\ :\ y = f'(1)(x-1) + f(1)$

لدينا :
$$\begin{cases} f'(1) = \dfrac{2}{1(2-1)} = 2 \\ f(1) = \ln\left(\dfrac{1}{2-1}\right) = 0 \end{cases}$$

إذن : $(D)\ :\ y = 2(x-1) + 0$

أي : $(D)\ :\ y = 2x - 2$

3 أ

لدينا :
$$\psi\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} = \ln\left(\frac{\frac{3}{2}}{2-\frac{3}{2}}\right) - \frac{3}{2} = \ln\left(\frac{9}{8}\right) - \frac{3}{2} \approx -1{,}38 < 0$$

إذن :
$$\psi\left(\frac{3}{2}\right) < 0$$

و لدينا كذلك :
$$\psi\left(\frac{7}{4}\right) = f\left(\frac{7}{4}\right) - \frac{7}{4} = \ln\left(\frac{\frac{7}{4}}{2-\frac{7}{4}}\right) - \frac{7}{4} = \ln 14 - \frac{7}{4} \approx 0{,}89 > 0$$

إذن :
$$\psi\left(\frac{7}{4}\right) > 0$$

3 ب

لدينا : $\psi(x) = f(x) - x$.

إذن : ψ دالة متصلة على $\left[\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right]$ لأنها عبارة عن فرق دالتين متصلتين.

و بما أن : $\psi\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ و $\psi\left(\frac{7}{4}\right) > 0$ فإن : $\psi\left(\frac{3}{2}\right)\psi\left(\frac{7}{4}\right) < 0$.

و منه حسب مبرهنة القيم الوسطية (TVI) :

$$\exists\, \alpha \in \left]\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right[\ ;\ \psi(\alpha) = 0$$

يعني : $\exists\, \alpha \in \left]\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right[\ ;\ f(\alpha) = \alpha$

و هذا يعني أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا α بحيث $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{7}{4}$.

و بما أن الدالة f تزايدية قطعا فإن الحل α يكون وحيدا .

و يمكن تأويل هذه النتيجة بما يلي :

$(\mathscr{C}_f)$ يقطع المُنَصِّف الأول للمعلم (المستقيم ذو المعادلة $y = x$) في نقطة واحدة أفصولها α يحقق : $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{7}{4}$

4 أ

رأينا في ما سبق أن الدالة f متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0;2[$.

إذن f تقابل من المجال $]0;2[$ نحو صورته $f(]0;2[)$.

$$f(\,]0,2[\,) = \left]\lim_{x\to0^+} f(x)\ ;\ \lim_{x\to2^-} f(x)\right[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$$

إذن f تقابل من المجال $]0;2[$ نحو $\mathbb{R}$.

4 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;2[$.

لدينا f تقابل من $]0;2[$ نحو $\mathbb{R}$. إذن حسب تعريف التطبيق التقابلي :

$$(\forall\, x \in\,]0;2[)\,,(\exists!\, y \in \mathbb{R})\ :\ f(x) = y$$

YOUR WAY طريقكم جمعية

يعني : $(\forall x \in]0;2[)\,,(\exists!\, y \in \mathbb{R})\ ;\ \ln\left(\frac{x}{2-x}\right) = y$

يعني : $(\forall x \in]0;2[)\,,(\exists!\, y \in \mathbb{R})\ ;\ \frac{x}{2-x} = e^y$

يعني : $(\forall x \in]0;2[)\,,(\exists!\, y \in \mathbb{R})\ ;\ x = (2-x)e^y$

يعني : $(\forall x \in]0;2[)\,,(\exists!\, y \in \mathbb{R})\ ;\ x = 2e^y - xe^y$

يعني : $(\forall x \in]0;2[)\,,(\exists!\, y \in \mathbb{R})\ ;\ x(1+e^y) = 2e^y$

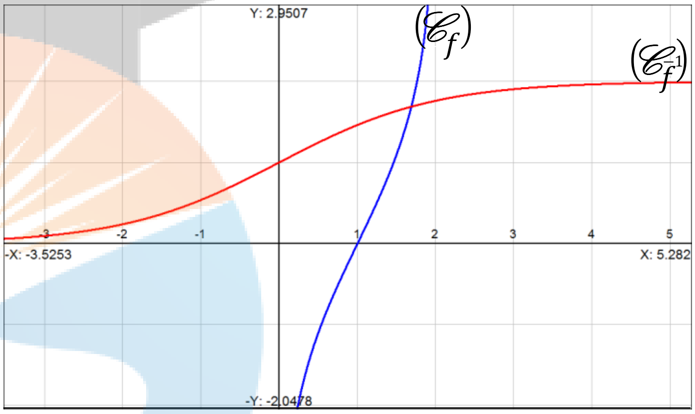
يعني : $(\forall x \in]0;2[)\,,(\exists!\, y \in \mathbb{R})\ ;\ x = \frac{2e^y}{1+e^y}$

وبالتالي : الدالة f^{-1} معرفة بما يلي : $f^{-1} : \mathbb{R} \longmapsto]0;2[$

$$y \longmapsto \frac{2e^y}{1+e^y}$$

أو بتعبير آخر : $(\forall y \in \mathbb{R})\ ;\ f^{-1}(y) = \frac{2e^y}{1+e^y}$

5



6 أ

يمكن أن نجيب على هذا السؤال بطريقتين مختلفتين :

الطريقة الأولى : حساب التكامل باستعمال تقنية تغيير المتغير .

$$\int_0^\alpha \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^\alpha \left(\frac{2e^x}{1+e^x}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^\alpha f^{-1}(x)\,dx$$

نضع : $y = f^{-1}(x)$ إذن : $f(y) = x$

و منه : $\frac{dx}{dy} = f'(y) = \frac{2}{y(2-y)}$ يعني : $dx = \frac{2dy}{y(2-y)}$.

إذا كان : $x = 0$ فإن : $y = 1$

إذا كان : $x = \alpha$ فإن : $y = \alpha$

إذن التكامل يصبح :

$$\frac{1}{2}\int_0^\alpha \left(\frac{2}{2-y}\right)dy = \int_0^\alpha \left(\frac{1}{2-y}\right)dy = -\int_0^\alpha \frac{(2-y)'}{(2-y)}dy$$

$$= [\ln(2-y)]_1^\alpha = -(\ln(2-\alpha) - \ln 1)$$

$$= -\ln(2-\alpha)$$

و بالتالي : $\int_0^\alpha \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = -\ln(2-\alpha)$

الطريقة الثانية : حساب التكامل باستعمال الدالة الأصلية .

لدينا : $\int_0^\alpha \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = \int_0^\alpha \frac{(1+e^x)'}{(1+e^x)}dx = [\ln(1+e^x)]_0^\alpha$

$$= \ln(1+e^\alpha) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+e^\alpha}{2}\right)$$

و بما أن : $f(\alpha) = \alpha$ فإن : $\ln\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right) = \alpha$

يعني : $e^\alpha = \frac{\alpha}{2-\alpha}$ أي : $\frac{1+e^\alpha}{2} = \frac{1}{2-\alpha}$

إذن : $\ln\left(\frac{1+e^\alpha}{2}\right) = -\ln(2-\alpha)$

و بالتالي : $\int_0^\alpha \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = -\ln(2-\alpha)$

6 ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$

لدينا حسب التمثيل المبياني السابق :

$$\mathcal{A} = \int_0^\alpha f^{-1}(x)\,dx - \int_1^\alpha f(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^\alpha \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx - \int_1^\alpha f(x)\,dx$$

لنحسب الآن التكامل : $\int_1^\alpha f(x)\,dx$

$$\int_1^\alpha f(x)\,dx = \int_1^\alpha \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)}_{v} dx$$

$$= \left[x\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)\right]_1^\alpha - \int_1^\alpha \frac{2x}{x(2-x)}dx$$

$$= \left[x\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)\right]_1^\alpha + 2\int_1^\alpha \frac{(2-x)'}{(2-x)}dx$$

$$= \left[x\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)\right]_1^\alpha + 2[\ln(2-x)]_1^\alpha$$

$$= \alpha\ln\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right) + 2\ln(2-\alpha)$$

$$= \alpha\ln\alpha + (2-\alpha)\ln(2-\alpha)$$

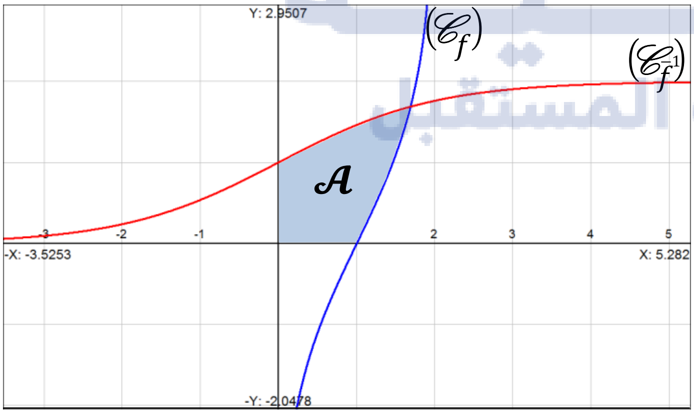
و بالتالي بالرجوع إلى حساب المساحة $\mathcal{A}$ نجد :

$$\mathcal{A} = 2\int_0^\alpha \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx - \int_1^\alpha f(x)\,dx$$

$$= -2\ln(2-\alpha) - \alpha\ln\alpha - (2-\alpha)\ln(2-\alpha)$$

$$= (\alpha-4)\ln(2-\alpha) - \alpha\ln\alpha$$

و بالتالي : $\mathcal{A} = (\alpha-4)\ln(2-\alpha) - \alpha\ln\alpha$



طريقتكم YOUR WAY جمعية إرشاد شباب المستقبل

الامتحـــــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريـــــــا
الدورة العــــــادية **2006**

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

مـــادة الريـــــاضيات
العلوم التجـــريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجـــية بمسلكيها
مدة الانجاز **3h** ـ المعامل **7**

التمرين الأول : (2,0 ن)

1 حل المعادلة التفاضلية : $y'' - 6y' + 9y = 0$ ‏ 0,75 ن

2 نعتبر المعادلة التفاضلية التالية : $(E)\ :\ y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}$

2 **أ** بين أن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $u(x) = x^2e^{3x}$ هي حل خاص للمعادلة (E) . ‏ 0,75 ن

2 **ب** إعط الحل العام للمعادلة (E) . ‏ 0,50 ن

التمرين الثاني : (4,0 ن)

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2\sqrt{3}(1+i)z + 8i = 0$

نرمز بـ z_1 و z_2 لحلي هذه المعادلة بحيث : $\Re e(z_1) > Re(z_2)$

1 حدد z_1 و z_2 (لاحظ أن : $(1-i)^2 = -2i$) ‏ 0,75 ن

2 **أ** بين أن : $z_1^2 = 4\left(\sqrt{3}+i\right)$ و $z_2 = i\overline{z_1}$. ‏ 1,00 ن

2 **ب** أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $4\left(\sqrt{3}+i\right)$. ‏ 0,25 ن

2 **ج** استنتج الشكل المثلثي لكل من العددين : z_1 و z_2 . ‏ 1,00 ن

3 نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما : z_1 و z_2 .
أحسب $arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ ثم استنتج أن المثلث $\mathcal{O}AB$ متساوي الأضلاع. ‏ 1,00 ن

التمرين الثالث : (4,0 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقطة $A(1,-1,3)$
و المستوى $(\mathcal{P})\ :\ x - y + 3z = 0$.

1 **أ** تحقق من أن : $\begin{cases} x = t \\ y = -t \quad (t\epsilon\mathbb{R}) \\ z = 3t \end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم $(\mathcal{O}A)$. ‏ 0,50 ن

1 **ب** حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) العمودي على $(\mathcal{O}A)$ في النقطة A . ‏ 0,75 ن

1 **ج** تحقق من أن $(\mathcal{P})$ يوازي (Q) . ‏ 0,25 ن

2 نعتبر الفلكة $(\mathcal{S})$ المماسة للمستوى (Q) في النقطة A و التي يقطعها المستوى $(\mathcal{P})$ وفق الدائرة (Γ) التى مركزها $\mathcal{O}$ و شعاعها $\sqrt{33}$.

2 **أ** بين أن $\Omega(a,b,c)$ مركز الفلكة $(\mathcal{S})$ ينتمي إلى $(\mathcal{O}A)$
ثم استنتج أن : $b = -a$ و $c = 3a$. ‏ 0,75 ن

2 **ب** بين أن : $\Omega A^2 - \Omega\mathcal{O}^2 = 33$ ثم استنتج أن : $a - b + 3c = -11$. ‏ 1,25 ن

2 **ج** استنتج إحداثيات Ω مركز الفلكة $(\mathcal{S})$ ثم بين أن شعاعها يساوي $2\sqrt{11}$. ‏ 0,50 ن

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الرابع : (10 ن)

I			نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0\,;\,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\ln(1+x)-x$	
I	1	أ	أحسب $g'(x)$ لكل x من المجال $[0\,;\,+\infty[$. ثم بين أن الدالة g تناقصية قطعا على المجال $[0\,;\,+\infty[$.	0,75 ن
I	1	ب	استنتج أن : $g(x)\leq 0 \ : \ \forall\, x \in [0\,;\,+\infty[$.	0,25 ن
I	2		بين أن : $0<\ln(1+x)<x \ : \ \forall\, x \in\,]0\,;\,+\infty[$	0,50 ن
II			نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ و $(\mathscr{C})$ هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$	
II	1		بين أن حيز تعريف الدالة f هو : $D=\,]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$	0,50 ن
II	2	أ	بين أن f دالة فردية .	0,50 ن
II	2	ب	أحسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.	0,50 ن
II	3	أ	بين أن : $f'(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}\ ;\ (\forall x\epsilon D)$	0,75 ن
II	3	ب	أدرس إشارة $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ (يمكن ملاحظة : $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}\ ;\ (\forall x\epsilon D)$)	0,50 ن
II	4		استنتج الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم $(\Delta)\ :\ y=x$.	0,25 ن
II	5		أنشئ $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ $(\Vert\vec{\imath}\Vert=\Vert\vec{\jmath}\Vert=1\ cm)$	1,00 ن
II	6	أ	بين أن : $\displaystyle\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx=5\ln 5-6\ln 3$ (استعمل المكاملة بالأجزاء)	1,25 ن
II	6	ب	استنتج بالوحدة cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي : $x=2$ و $x=4$ و $y=x$.	0,50 ن
III			نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq2}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\geq 2)\ ;\ u_n=f(n)-n$	
III	1	أ	تحقق من أن : $u_n=\ln\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right)\ ;\ \forall\, n\,\epsilon\,\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$	0,25 ن
III	1	ب	بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq2}$ تناقصية .	0,75 ن
III	2	أ	بين أن : $0<u_n<\dfrac{2}{n-1}\ ;\ \forall\, n\,\epsilon\,\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ (استعمل نتيجة السؤال I 2 ☐)	0,50 ن
III	2	ب	أحسب النهاية : $\lim\limits_{n\infty} u_n$	0,50 ن

طريقكم YOUR WAY جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

أجوبة امتحان الدورة العادية 2006

التمرين الأول :

1

لحل المعادلة التفاضلية : $(H) : y'' - 6y' + 9y = 0$.

نحل أولا معادلتها المميزة : $(C) :\ r^2 - 6r + 9 = 0$

لدينا : $\Delta = 36 - 36 = 0$

إذن (C) تقبل حلا مزدوجا و هو $r = 3$.

و منه y_H حل المعادلة التفاضلية (H) هو : $y_H = (Ax + B)e^{3x}$.

بحيث : A و B أعداد حقيقية ثابتة . (*Des constantes réelles*) .

2 أ

لدينا : $(E) : y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}$

لتكن u الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $u(x) = x^2 e^{3x}$

لدينا : $u'(x) = 2xe^{3x} + 3x^2 e^{3x} = (3x^2 + 2x)e^{3x}$

و لدينا : $u''(x) = (9x^2 + 12x + 2)e^{3x}$

إذن :

$$\begin{aligned} u''(x) - 6u'(x) + 9u(x) &= (9x^2 + 12x + 2)e^{3x} - 6(3x^2 + 2x)e^{3x} + 9x^2 e^{3x} \\ &= (9x^2 + 12x + 2 - 18x^2 - 12x + 9x^2)e^{3x} \\ &= 2e^{3x} \end{aligned}$$

حصلنا إذن على : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) ; u''(x) - 6u'(x) + 9u(x) = 2e^{3x}$

إذن u حل خاص للمعادلة (E) على $\mathbb{R}$.

2 ب

الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل : $y = y_H + y_P$

بحيث : y_P حل خاص للمعادلة (E) . و y_H هو حل المعادلة (H) .

إذن : $y = (Ax + B)e^{3x} + x^2 e^{3x} = (x^2 + Ax + B)e^{3x}$.

التمرين الثاني :

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2\sqrt{3}(1 + i)z + 8i = 0$

لدينا :

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(2\sqrt{3}(1 + i)\right)^2 - 32i = 12(1 + i)^2 - 32i \\ &= -8i + 4(-2i) = 4(1 - i)^2 = \left(2(1 - i)\right)^2 \end{aligned}$$

إذن المعادلة تقبل حلين z_1 و z_2 بحيث :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{2\sqrt{3}(1 + i) + 2(1 - i)}{2} = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1) \\ z_2 = \dfrac{2\sqrt{3}(1 + i) - 2(1 - i)}{2} = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1) \end{cases}$$

2 أ

لدينا :

$$\begin{aligned} z_1^2 &= \left((\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)\right)^2 \\ &= (\sqrt{3} + 1)^2 - (\sqrt{3} - 1)^2 + 2i(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) \\ &= (4 + 2\sqrt{3}) - (4 - 2\sqrt{3}) + 4i \\ &= 4\sqrt{3} + 4i = 4(\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$

إذن : $z_1^2 = 4(\sqrt{3} + i)$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned} i\,\overline{z_1} &= i\,\overline{\left((\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)\right)} \\ &= i\left((\sqrt{3} + 1) - i(\sqrt{3} - 1)\right) = \sqrt{3}i + i + \sqrt{3} - 1 \\ &= (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1) = z_2 \end{aligned}$$

إذن : $z_2 = i\,\overline{z_1}$

2 ب

$$4(\sqrt{3} + i) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 8e^{\frac{i\pi}{6}}$$

2 ج

ليكن : $z_1 = re^{i\theta}$ لدينا : $z_1^2 = r^2 e^{i2\theta} = 4(\sqrt{3} + i) = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$.

إذن : $\begin{cases} r^2 = 8 \\ 2\theta \equiv \frac{\pi}{6} [\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \theta \equiv \frac{\pi}{12} [\pi] \end{cases}$

و بالتالي : $z_1 = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{12}}$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned} z_2 = i\overline{z_1} &= i\,\overline{\left(2\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{12}}\right)} = i\left(2\sqrt{2}\, e^{\frac{-i\pi}{12}}\right) \\ &= \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)\left(2\sqrt{2}\, e^{\frac{-i\pi}{12}}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)} = 2\sqrt{2}e^{\frac{i5\pi}{12}} \end{aligned}$$

و بالتالي : $z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{i5\pi}{12}}$

3

نضع : $z_1 = aff(A)$ و $z_2 = aff(B)$.

لدينا :

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2\sqrt{2}e^{\frac{i5\pi}{12}}}{2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}}} = e^{i\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right)} = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

إذن : $\frac{z_2}{z_1} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ و منه : $\begin{cases} \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} \left|\frac{z_2 - 0}{z_1 - 0}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_2 - 0}{z_1 - 0}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} |z_2 - 0| = |z_1 - 0| \\ \arg\left(\frac{z_2 - 0}{z_1 - 0}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} OB = OA \\ (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$

و هذا يعني أن المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O و قياس الزاوية $\hat{O}$ يساوي $60°$. إذن OAB مثلث متساوي الأضلاع .

التمرين الثاني :

1 أ

لدينا $\overrightarrow{OA}(1; -1; 3)$ و لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من المستقيم (OA) .

إذن المتجهتان $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OA}$ مستقيميتان .

و منه يوجد عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{OM} = t\,\overrightarrow{OA}$. يعني : $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases}$

و هذا تمثيل بارامتري للمستقيم (OA) .

1 ب

نضع : $(Q) : ax+by+cz+d=0$

(Q) مستوى معرف بمعلومتين و هما : $\begin{cases}(OA)\perp(Q)\\ A\in(Q)\end{cases}$.

بما أن $(OA)\perp(Q)$ فإن $\overrightarrow{OA}(1;-1;3)$ متجهة منظمية على (Q) .

و منه نأخذ : $(a,b,c)=(1;-1;3)$

و لدينا كذلك : $A\epsilon(Q)$ إذن : $1-(-1)+9+d=0$ أي : $d=-11$

و بالتالي : $(Q) : x-y+3z-11=0$

1 ج

لدينا : $\begin{cases}(P) : x-y+3z=0\\ (Q) : x-y+3z-11=0\end{cases}$

نلاحظ أن $\vec{n}(1;-1;3)$ متجهة منظمية على كل من المستويين (P) و (Q)

إذن : $(P)\parallel(Q)$

2 أ

لدينا $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها Ω و مماسة للمستوى (Q) في النقطة A .

إذن : $(\Omega A)\perp(Q)$.

و لدينا حسب السؤال 1) ب) : $(OA)\perp(Q)$

نستنتج إذن أن المستقيمان (Ω) و (OA) عموديان على نفس المستوى (Q) و لهما نقطة مشتركة A .

إذن : (ΩA) و (OA) منطبقان .

أو بتعبير آخر : النقط A و Ω و O نقط مستقيمية .

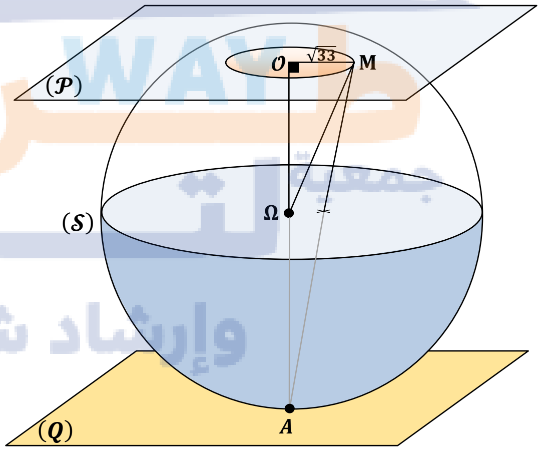
و منه : $\Omega(a,b,c)\ \epsilon\ (OA)$

و نعلم أن : $(OA) : \begin{cases}x=t\\ y=-t\\ z=3t\end{cases}\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})$

إذن : $\begin{cases}a=t\\ b=-t\\ c=3t\end{cases}$ و بالتالي : $b=-a$ و $c=3a$

2 ب

نستعين بالشكل التالي :



نلاحظ في البداية أن : $\Omega A=\Omega M=$ شعاع $(\mathcal{S})$ لأن $M\epsilon(\mathcal{S})$ و $A\epsilon(\mathcal{S})$

إذن بتطبيق قاعدة فيتاغورس في المثلث $O\Omega M$ القائم الزاوية في O نحصل على : $\Omega M^2=\Omega O^2+OM^2$

يعني : $\Omega A^2=\Omega O^2+33$ إذن : $\Omega A^2-\Omega O^2=33$

$$((1-a)^2+(-1-b)^2+(3-c)^2)-(a^2+b^2+c^2)=33$$

نعوض b بالعدد $-a$ و نعوض c بالعدد $3a$ نحصل على :

$$((1-a)^2+(1-a)^2+(3-3a)^2)-(11a^2)=33$$

إذن : $11(1-a)^2-11a^2=33$

يعني : $11(1+a^2-2a)-11a^2=33$

يعني : $11-22a=33$ يعني : $-22a=22$ أي : $a=-1$

و بالتالي : $a-b+3c=a-(-a)+3(3a)=11a=-11$

يعني : $a-b+3c=-11$

2 ج

لدينا : $b=-a$ و $c=3a$ و $a=-1$. إذن : $\Omega(-1;1;-3)$

ليكن r شعاع الفلكة $(\mathcal{S})$. أقترح في الإجابة طريقتين :

الطريقة الأولى:

لدينا : $A\epsilon(\mathcal{S})$ إذن : $r=\Omega A=\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(6)^2}=\sqrt{44}=\sqrt{4\times 11}=2\sqrt{11}$

الطريقة الثانية:

لدينا : $\Omega(-1;1;-3)$ و $(\mathcal{S})$ مماسة للمستوى (Q).

إذن : $r=d\big(\Omega,(Q)\big)=\dfrac{|-1-1-9-11|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}}=\dfrac{22}{\sqrt{11}}=2\sqrt{11}$

التمرين الرابع:

I 1 أ

ليكن عنصرا من $[0;+\infty[$. لدينا : $g(x)=\ln(1+x)-x$.

إذن : $g'(x)=\dfrac{(1+x)'}{(1+x)}-1=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{1-(1+x)}{1+x}=\dfrac{-x}{1+x}$

نعلم أن : $x\ \epsilon\ [0;+\infty[$ إذن : $g'(x)\leq 0$.

و بالتالي : g دالة تناقصية على المجال $[0;+\infty[$.

I 1 ب

ليكن x عنصرا من المجال $[0;+\infty[$. يعني : $x\geq 0$.

نُدخِلُ الدالة g على هذه المتفاوتة نحصل على ما يلي : $g(x)\leq g(0)$.

يعني : $g(x)\leq \ln(1+0)-0$ يعني : $g(x)\leq 0$.

و بالتالي : $\forall\, x\ \epsilon\ [0;+\infty[\ ;\ g(x)\leq 0$

I 2

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

يعني : $x>0$ يعني : $x+1>1$

و منه : $\ln(x+1)>\ln 1$ يعني : $\ln(x+1)>0$

إذن : $\boxed{\forall\, x\ \epsilon\ ]0;+\infty[\ ;\ 0<\ln(x+1)}$ (1)

من جهة أخرى لدينا : $\forall\, x\ \epsilon\ [0;+\infty[\ ;\ g(x)\leq 0$

إذن : $\forall\, x\ \epsilon\ ]0;+\infty[\ ;\ g(x)<0$

و منه : $\forall\, x\ \epsilon\ ]0;+\infty[\ ;\ \ln(x+1)-x<0$

يعني : $\boxed{\forall\, x\ \epsilon\ ]0;+\infty[\ ;\ \ln(1+x)<x}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $\forall\, x\ \epsilon\ ]0;+\infty[\ ;\ 0<\ln(x+1)<x$

II 1

لدينا : $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان : $x-1\neq 0$ و $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)>0$

الجدول التالي يُعَبر عن إشارة الكمية $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

من هذا الجدول نستنتج أن الدالة f تكون معرفة إذا كان :
. $x \in]1;+\infty[$ أو $x \in]-\infty;1[$

و بالتالي : $\mathfrak{D}_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

II 2 أ

ليكن x عنصرا من $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

لدينا :
$$f(-x) = -x + \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = -x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$= -x + \ln\left(\frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}\right) = -x - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$
$$= -\left(x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) = -f(x)$$

نحصل على : $\forall\, x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\ ; \ f(-x) = -f(x)$

إذن f دالة فردية .

يعني أن تمثيلها المبياني متماثل بالنسبة لأصل المعلم O .

II 2 ب

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{x}_{\to +\infty} + \ln\underbrace{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}_{\to 1}\right)$$
$$= +\infty + \ln 1 = \infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(\underbrace{x}_{\to 1} + \ln\underbrace{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}_{\to 0^+}\right)$$
$$= 1 + \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = 1 + \ln(+\infty)$$
$$= 1 + \infty = +\infty$$

II 3 أ

لدينا f عبارة عن تشكيلة منسجمة من الدوال القابلة للاشتقاق على $\mathfrak{D}$.

إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathfrak{D}$.

ليكن x عنصرا من $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

لدينا :
$$f'(x) = \left(x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)' = 1 + \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$
$$= 1 + \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = 1 - \frac{2}{(x-1)^2} \times \left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 - \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$
$$= 1 - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x^2-1-2}{x^2-1} = \boxed{\frac{x^2-3}{x^2-1}}$$

II 3 ب

لدينا : $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} \ ; \ (\forall x \in \mathfrak{D})$

إذا كان $x > 1$ فإن : $x - 1 > 0$ و منه : $\frac{2}{x-1} > 0$

يعني : $1 + \frac{2}{x-1} > 1$ يعني : $\frac{x+1}{x-1} > 1$

إذن : $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > \ln(1)$ يعني : $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$

من جهة أخرى إذا كان $x < -1$ فإن : $x - 1 < -2$

إذن : $x - 1 < 0$ يعني : $\frac{1}{x-1} < 0$

ومنه : $\frac{2}{x-1} < 0$ يعني : $1 + \frac{2}{x-1} < 1$

ومنه : $\frac{x+1}{x-1} < 1$ يعني : $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < \ln 1$

يعني : $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 0$

و نلخص إشارة التعبير $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$		$-$		Le courant d'air		$+$	

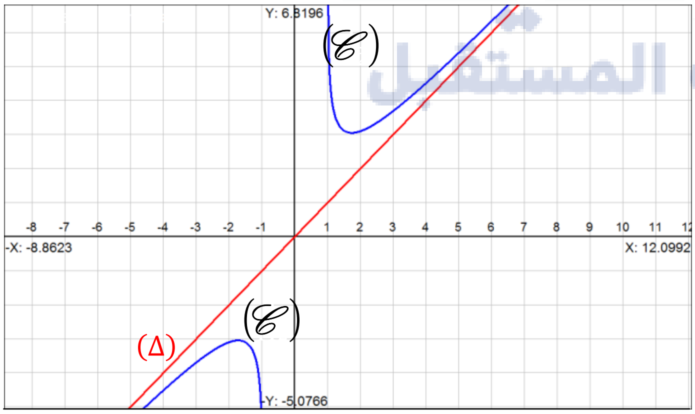
II 4

لدينا : $f(x) - x = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

نستنتج إذن الوضع النسبي لـ (Δ) و $(\mathscr{C})$ كما يلي :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$		$-$		Le courant d'air		$+$	
الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ)		المستقيم (Δ) يوجد فوق المنحنى $(\mathscr{C})$		$(\mathscr{C})$ غائب و (Δ) حاضر		المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد فوق المستقيم (Δ)	

II 5



طريقي YOUR WAY توجيه وإرشاد شباب المستقبل

II 6 أ

$$\int_2^4 \underset{u'}{1}\ \underbrace{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}_{v} dx = \left[x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]_2^4 - \int_2^4 x\left(\frac{-2}{x^2-1}\right)dx$$

$$= \left(4\ln\left(\frac{5}{3}\right) - 2\ln 3\right) + \int_2^4 \left(\frac{2x}{x^2-1}\right)dx$$

$$= (4\ln 5 - 4\ln 3 - 2\ln 3) + [\ln(x^2-1)]_2^4$$

$$= (4\ln 5 - 6\ln 3) + (\ln 15 - \ln 3)$$

$$= (4\ln 5 - 6\ln 3) + (\ln(3\times 5) - \ln 3)$$

$$= (4\ln 5 - 6\ln 3) + (\ln 3 + \ln 5 - \ln 3)$$

$$= 5\ln 5 - 6\ln 3$$

II 6 ب

نحسب المساحة $\mathcal{A}$ المطلوبة في السؤال باستعمال التكامل التالي :

$$\mathcal{A} = \int_2^4 |f(x) - x|\, dx$$

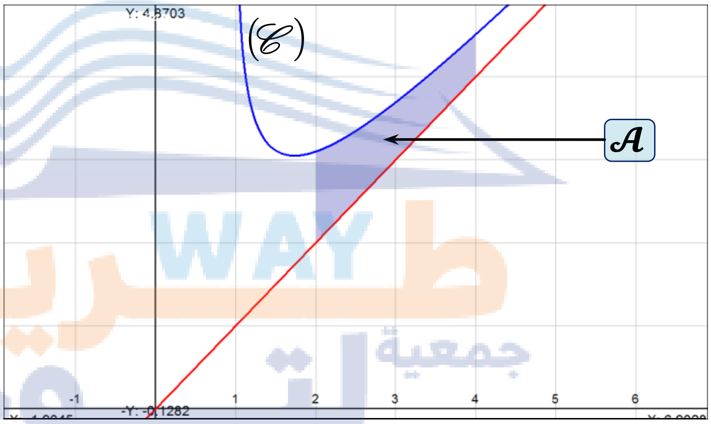
بما أن (Δ) يوجد فوق المنحنى $(\mathscr{C})$ في المجال $]1;+\infty[$.

فإن : $f(x) - x > 0$

و منه : $\mathcal{A} = \int_2^4 |f(x)-x|\,dx = \int_2^4 (f(x)-x)\,dx$

$$= \int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx$$

$$= (5\ln 5 - 6\ln 3)cm^2 \approx 1{,}456\ cm^2$$



III 1 أ

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n \ge 2$.

لدينا : $u_n = f(n) - n = n + \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) - n$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$$

إذن : $(\forall n \ge 2)\ ;\ u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$

III 1 ب

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n \ge 2$.

إذن : $n \ge n-1$ و منه : $\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$

يعني : $\frac{2}{n} < \frac{2}{n-1}$ يعني : $1 + \frac{2}{n} < 1 + \frac{2}{n-1}$

يعني : $1 + \frac{2}{(n+1)-1} < 1 + \frac{2}{n-1}$

يعني: $\ln\left(1 + \frac{2}{(n+1)-1}\right) < \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$ يعني : $u_{n+1} < u_n$

حصلنا إذن على : $(\forall n \ge 2)\ ;\ u_{n+1} < u_n$.

إذن $(u_n)_{n\ge 2}$ متتالية تناقصية .

III 2 أ

لدينا حسب السؤال (I 2) : $(\forall x > 0)\ ;\ 0 < \ln(1+x) < x$

ليكن $n \ge 2$ إذن : $n - 1 \ge 1 > 0$ و منه : $\frac{1}{n-1} > 0$

إذن يمكننا تطبيق العلاقة $(*)$ بتعويض x بـ $\frac{1}{n-1}$

يعني : $(\forall n \ge 2)\ ;\ 0 < \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) < \frac{2}{n-1}$

و بالتالي : $(\forall n \ge 2)\ ;\ 0 < u_n < \frac{2}{n-1}$

III 2 ب

لدينا : $(\forall n \ge 2)\ ;\ \underbrace{0}_{\xrightarrow{n\infty} 0} < u_n < \underbrace{\frac{2}{n-1}}_{\xrightarrow{n\infty} 0}$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات : $(u_n)_{n\ge 2}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى الصفر لأن حدها العام محصور بين متتاليتين تؤولان معا إلى الصفر .

$$\boxed{\lim_{n\infty} u_n = 0}$$

YOUR WAY
جمعية طريقكم لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

الإمتحـــــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريـــــا
الدورة الاستدراكية 2006

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

مـــادة الريــــــاضيات
العلوم التجــريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجــية بمسلكيها
مدة الانجـاز 3h ـ المعامل 7

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

النقط التالية : $A(1,2,-2)$ و $B(1,-1,1)$ و $C(2,1,-2)$.

0,75 ن — 1 أ — حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

0,75 ن — 1 ب — بين أن : $x+y+z-1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

2 — لتكن $(\mathcal{S})$ الفلكة التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ و شعاعها $R=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

0,75 ن — 2 أ — بين أن (ABC) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ ثم حدد مثلوث إحداثيات H نقطة تماس (ABC) و $(\mathcal{S})$.

0,75 ن — 2 ب — لتكن $M(a,b,c)$ نقطة من المستوى (ABC) بين أن : $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$

التمرين الثاني : (3,0 ن)

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N} \;:\; u_{n+2}=\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n\\ u_1=1 \quad \text{و} \quad u_0=0\end{cases}$$

نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ و $w_n=5^n u_n$.

0,75 ن — 1 — بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ ثم أكتب v_n بدلالة n .

0,25 ن — 2 أ — بين أن المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية أساسها 5 .

0,50 ن — 2 ب — أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

0,75 ن — 3 أ — بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\;;\;0<u_{n+1}<\frac{2}{5}u_n$

0,75 ن — 3 ب — استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\;;\;0<u_n<\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ ثم أحسب النهاية : $\lim\limits_{n\infty}u_n$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

يحتوي كيس $\mathcal{U}_1$ على 5 بيدقات : ثلاث منها تحمل الرقم 2 و بيدقتان تحملان الرقم 3 . و يحتوي كيس ثاني $\mathcal{U}_2$ على 5 بيدقات : ثلاث منها بيضاء و اثنتان حمراوين (لا يمكن التمييز بينها باللمس) نسحب عشوائيا بيدقة واحدة من الكيس $\mathcal{U}_1$ و نسجل رقمها ثم نسحب عشوائيا و في آن واحد n بيدقة من الكيس $\mathcal{U}_2$ بحيث n هو الرقم الذي تحمله البيدقة المسحوبة من الكيس $\mathcal{U}_1$.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد البيدقات الحمراء المسحوبة .

2,75 ن — 1 — حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

0,25 ن — 2 — أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

YOUR WAY

التمرين الرابع : (3,0 ن)

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+2z+1+i=0$

نرمز بـ z_1 و z_2 لحلي هذه المعادلة بحيث : $\mathfrak{Im}(z_1)>0$.

1 حدد z_1 و z_2 (لاحظ أن : $(1-i)^2=-2i$) — 0,75 ن

2 نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي : -1 و $\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ و z_1 و z_2 .

2 أ أكتب العدد العقدي $\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ على الشكل المثلثي . — 0,50 ن

2 ب تحقق من أن : $\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{OB}$ و أن A منتصف القطعة $[M_1M_2]$ ثم أنشئ : A و B و M_1 و M_2 — 0,75 ن

2 ج استنتج أن الرباعي $AOBM_1$ معين ثم استنتج أن : $\arg(z_1)\equiv\frac{7\pi}{8}[2\pi]$ — 1,00 ن

التمرين الخامس : (8 ن)

I نعتبر المعادلة التفاضلية التالية : $y''-2y'+y=x-1$: (E) .

I 1 حل المعادلة التفاضلية : $y''-2y'+y=0$ — 0,75 ن

I 2 أ أوجد حلا خاصا للمعادلة (E) من النوع : $y_p : x \to ax+b$ — 0,25 ن

I 2 ب إعط الحل العام للمعادلة (E) . — 0,25 ن

I 2 ج حدد الحل h للمعادلة (E) الذي يحقق : $h(0)=0$ و $h'(0)=1$ — 0,50 ن

I 3 نعتبر الدالة g المعرفة على $[0\,;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=(x-1)e^x+(x+1)$

I 3 أ أحسب $g'(x)$ لكل x من $[0\,;+\infty[$ ثم استنتج أن الدالة g تزايدية قطعا على $[0\,;+\infty[$. — 0,75 ن

I 3 ب بين أن : $\forall x \in [0\,;+\infty[\ ;\ g(x)\geq 0$ (لاحظ أن : $g(0)=0$) — 0,25 ن

II نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x)=\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}$

و $(\mathscr{C})$ هو منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

II 1 بين أن f دالة فردية . — 0,50 ن

II 2 أ أحسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (نذكر أن : $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$) ثم أوّل النتيجة هندسيا . — 0,75 ن

II 2 ب بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ثم أوّل النتيجة مبيانيا (لاحظ أن : $((\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ f(x)=\frac{x}{e^x(1-e^{-x})^2})$ — 0,50 ن

II 3 أ بين أن : $f'(x)=\frac{-e^x}{(e^x-1)^3}g(x)\quad \forall x\in\,]0;+\infty[$ — 0,75 ن

II 3 ب إعط جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0\,;+\infty[$. — 0,50 ن

II 4 أرسم $(\mathscr{C})$. — 0,50 ن

II 5 أ بين أن : $\int_2^3 \frac{1}{t(1-t)}dt=2\ln 2-\ln 3$ (لاحظ أن : $\frac{1}{t(t-1)}=\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}$) — 0,50 ن

II 5 ب بوضع : $t=e^x$ بين أن : $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(t)\,dx=\int_2^3\frac{\ln t}{(t-1)^2}dt$ — 0,50 ن

II 6 أ باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_2^3\frac{\ln t}{(t-1)^2}dt=3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$ — 0,50 ن

II 6 ب استنتج مساحة الحيز المحصور بين $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين : $x=\ln 2$ و $x=\ln 3$

نأخذ : $\ln 2\approx 0{,}7$ و $\ln 3\approx 1{,}1$. — 0,25 ن

أجوبة امتحان الدورة الاستدراكية 2006

التمرين الأول:

1 أ

لدينا : $\begin{cases}A(1;2;-2)\\B(1;-1;1)\\C(2;1;-2)\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}\overrightarrow{AB}(0;-3;3)\\\overrightarrow{AC}(1;-1;0)\end{cases}$

و منه :
$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-3&-1\\3&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0&1\\3&0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0&1\\-3&-1\end{vmatrix}\vec{k}=3\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$$

إذن : $(3;3;3)$ هو مثلوث احداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

1 ب

لتكن $ax+by+cz+d=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(3;3;3)$ منظمية على المستوى (ABC)

فإن المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) تصبح :

و بما أن : $A(1;2;-2)\,\epsilon\,(ABC)$

فإن : $3\times1+3\times2+3\times(-2)+d=0$

يعني : $3+6-6+d=0$ إذن : $d=-3$

و بالتالي معادلة (ABC) تصبح : $(ABC):3x+3y+3z-3=0$

يعني : $(ABC):3(x+y+z-1)=0$

إذن : $(ABC):3(x+y+z-1)=0$

2 أ

لتكن $(\mathcal{S})$ الفلكة التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ و شعاعها $R=\frac{2}{\sqrt{3}}$

تكون $(\mathcal{S})$ مماسة لـ (ABC) إذا و فقط إذا كانت : $d(\Omega,(ABC))=R$

لدينا : $(ABC):x+y+z-1=0$

إذن : $d(\Omega,(ABC))=\frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=R$

إذن : $(\mathcal{S})$ مماسة للمستوى (ABC) في نقطة $H(\alpha,\beta,\gamma)$.

بما أن : $(\mathcal{S})\perp(ABC)$ فإن : $(\Omega H)\perp(ABC)$

و نعلم أن : $\vec{n}(1,1,1)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) .

إذن المتجهتان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{\Omega H}$ مستقيميتان .

يعني : $(\exists t\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \overrightarrow{\Omega H}=t\,\vec{n}$

يعني : $\begin{cases}\alpha-1=t\\\beta-1=t\\\gamma-1=t\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}\alpha=t+1\\\beta=t+1\\\gamma=t+1\end{cases}$

إذن : $\alpha=\beta=\gamma$

و بما أن : $H\,\epsilon\,(ABC)$ فإن : $\alpha+\beta+\gamma-1=0$

يعني : $\alpha+\alpha+\alpha-1=0$ يعني : $\alpha=\frac{1}{3}$

و بالتالي : $H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ هي نقطة تماس الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى (ABC) .

2 ب

لدينا $(\mathcal{S})$ مماسة للمستوى (ABC) في النقطة H .

إذن : $d(\Omega,(ABC))=\Omega H=\frac{2}{\sqrt{3}}$

و نعلم أن مسافة نقطة عن مستوى هي أصغر مسافة بين تلك النقطة و نقط المستوى .

هذا يعني أنه كيفما كانت النقطة $M(a,b,c)$ من المستوى (ABC) .

فإنه لدينا دائما : $d(\Omega,(ABC))\le\Omega M$ يعني : $\Omega H\le\Omega M$

يعني :
$$\sqrt{\left(\frac{-2}{3}\right)^2+\left(\frac{-2}{3}\right)^2+\left(\frac{-2}{3}\right)^2}\le\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2}$$
$$\left(\frac{-2}{3}\right)^2+\left(\frac{-2}{3}\right)^2+\left(\frac{-2}{3}\right)^2\le(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2$$

يعني : $\frac{4}{3}\le(a^2+b^2+c^2)+3-2(a+b+c)$

و بما أن : $\begin{cases}M(a,b,c)\,\epsilon\,(ABC)\\(ABC):x+y+z-1=0\end{cases}$ فإن : $(a+b+c)=1$

إذن : $\frac{4}{3}\le(a^2+b^2+c^2)+3-2\times(1)$

يعني : $\frac{4}{3}\le(a^2+b^2+c^2)+1$

و بالتالي : $\frac{1}{3}\le(a^2+b^2+c^2)$

التمرين الثاني:

1

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$. لدينا :
$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+2}-\frac{1}{5}u_{n+1}}{u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n}=\frac{\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n-\frac{1}{5}u_{n+1}}{u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n}=\frac{\frac{1}{5}\left(u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n\right)}{\left(u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n\right)}=\frac{1}{5}$$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{5}$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ :\ v_{n+1}=\frac{1}{5}v_n$

و بالتالي : $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

و نعلم أن الحد العام لمتتالية هندسية $(v_{n+1}=qv_n)$

يكتب على الشكل : $v_n=v_a\cdot q^{n-a}$

إذن الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ يكتب على شكل :
$$(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ v_n=v_0\left(\frac{1}{5}\right)^{n-0}$$

و لدينا : $v_0=u_1-\frac{1}{5}u_0=1-\frac{1}{5}\times0=1$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ v_n=\left(\frac{1}{5}\right)^n$

أو بتعبير آخر : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ v_n=5^{-n}$

2 أ

في البداية لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \begin{cases}v_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n\\v_n=5^{-n}\end{cases}$

إذن : $\frac{v_n}{v_n}=\frac{u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n}{5^{-n}}$

يعني : $1=5^nu_{n+1}-5^{n-1}u_n$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$. لدينا : $w_n=5^nu_n$

إذن :
$$w_{n+1}-w_n=5^{n+1}u_{n+1}-5^nu_n=5\Big(\underbrace{5^nu_{n+1}-5^{n-1}u_n}_{1}\Big)=5\times1=5$$

حصلنا إذن على : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ w_{n+1}-w_n=5$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ w_{n+1}=w_n+5$

إذن : $(w_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها 5 .

طريقكم YOUR WAY جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

2 ب

الحد العام لمتتالية حسابية $(u_{n+1} = u_n + r)$ يكتب على الشكل :

$$u_n = u_a + (n-a)r \ ; \ a\epsilon\mathbb{N}$$

إذن الحد العام للمتتالية الحسابية $(w_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ يكتب على شكل :

$$(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ w_n = \underbrace{w_0}_{0} + 5(n-0)$$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ w_n = 5n$

3 أ

لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ w_n = 5^n u_n$ و $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ w_n = 5n$

إذن : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ u_n = \frac{5n}{5^n}} \ (**)$

ليكن $n\epsilon\mathbb{N}^*$ إذن : $n \geq 1$ و منه $5n > 0$ و $5^n > 0$.

يعني : $\frac{5n}{5^n} > 0$ أي : $(\forall n \geq 1) \ ; \ u_n > 0$

و منه : $\boxed{(\forall n \geq 1) \ ; \ u_{n+1} > 0} \ \mathbf{(1)}$

من جهة أخرى لدينا : $n \geq 1$ إذن : $2n - n > 1$.

يعني : $2n > n+1$ يعني : $\frac{2n}{5^n} > \frac{(n+1)}{5^n}$

يعني : $\frac{2}{5}\left(\frac{n}{5^{n-1}}\right) > \frac{(n+1)}{5^n}$ يعني : $\frac{2}{5}\left(\frac{5n}{5^n}\right) > \frac{(n+1)}{5^n}$

إذن حسب النتيجة $(**)$: $\frac{2}{5}u_n > u_{n+1}$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \geq 1) \ ; \ u_{n+1} < \frac{2}{5}u_n} \ \mathbf{(2)}$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall n \geq 1) \ ; \ 0 < u_{n+1} < \frac{2}{5}u_n$

3 ب

لدينا : $(\forall n \geq 1) \ ; \ 0 < u_{n+1} < \frac{2}{5}u_n$

إذن : من أجل $(n-1)$ فما تحتها نحصل على التسلسل التالي :

$$0 < u_n < \frac{2}{5}u_{n-1}$$

$$0 < u_n < \frac{2}{5}\frac{2}{5}u_{n-2}$$

$$0 < u_n < \frac{2}{5}\frac{2}{5}\frac{2}{5}u_{n-3}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$0 < u_n < \left(\frac{2}{5}\right)^n u_{n-(n-1)}$$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \ ; \ 0 < u_n < \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} u_1$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \ ; \ 0 < u_n < \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

و بما أن : $\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ متتالية هندسية أساسها موجب و أصغر من 1

فإن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$

إذن : $$(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \ ; \ \underset{\xrightarrow[n\infty]{} 0}{0} < u_n < \underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى الصفر . يعني: $\lim\limits_{n\infty} u_n = 0$

التمرين الثالث :

1

عندما نسحب من الصندوق $\mathcal{U}_2$ كرتين أو ثلاث فإنه يُحتمل أن نحصل على :

- كرة حمراء واحدة و الباقي أبيض .
- أو كرتان حمراوين و الباقي أبيض (إن وُجِدَ)
- أو كرات بيضاء فقط .

إذن : قيم المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد البيدقات الحمراء المسحوبة هي : 0 أو 1 أو 2 . يعني : $X(\Omega) = \{0;1;2\}$

نعتبر الأحداث التالية :

D : " سحب بيدقة تحمل الرقم 2 من الصندوق $\mathcal{U}_1$ "

T : " سحب بيدقة تحمل الرقم 3 من الصندوق $\mathcal{U}_1$ "

$[X=0]$: " سحب كرات بيضاء فقط من الصندوق $\mathcal{U}_2$ "

$[X=1]$: " سحب كرة حمراء بالضبط من الصندوق $\mathcal{U}_2$ "

$[X=2]$: " سحب كرتين حمراوين بالضبط من الكيس $\mathcal{U}_2$ "

في هذا التمرين نسحب عشوائيا بيدقة من الكيس $\mathcal{U}_1$ و نسجل رقمها ثم نسحب عشوائيا و في آن واحد n بيدقة من الكيس $\mathcal{U}_2$ بحيث n هو الرقم الذي تحمله البيدقة المسحوبة من الكيس $\mathcal{U}_1$.

إذن لإنشاء شجرة الاحتمالات المناسبة نحتاج إلى حساب احتمالات بعض الأحداث الأساسية :

المجموعة الأولى :

$$\begin{cases} p(D) = \frac{C_3^1}{C_5^1} = \frac{3}{5} \\ p(T) = \frac{C_2^1}{C_5^1} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

المجموعة الثانية :

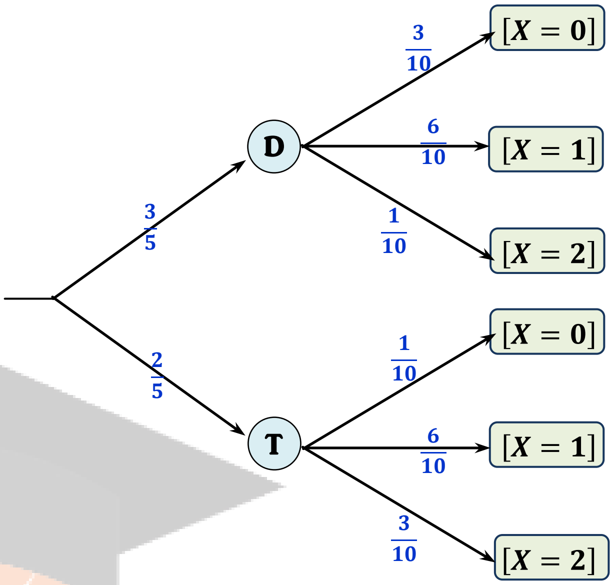
$$\begin{cases} p_D[X=0] = \frac{C_2^0 C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} \\ p_D[X=1] = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} \\ p_D[X=2] = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10} \end{cases}$$

المجموعة الثالثة :

$$\begin{cases} p_T[X=0] = \frac{C_2^0 C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10} \\ p_T[X=1] = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} = \frac{6}{10} \\ p_T[X=2] = \frac{C_2^2 C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10} \end{cases}$$

طريقكم YOUR WAY
جمعية توجيه وإرشاد شباب المستقبل

إذن نحصل على شجرة الاحتمالات التالية :



طلب منا في السؤال الأول تحديد قانون احتمال المتغير العشوائي X و هذا يعني بتعبير آخر تحديد احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X .

إذن هدفنا هو حساب $p[X=0]$ و $p[X=1]$ و $p[X=2]$

لدينا :
$$\begin{aligned} p[X=0] &= p([X=0]\cap D)+p([X=0]\cap T) \\ &= p(D)\cdot p_D[X=0]+p(T)\cdot p_T[X=0] \\ &= \frac{3}{5}\times\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{11}{50}\end{aligned}$$

لدينا :
$$\begin{aligned} p[X=1] &= p([X=1]\cap D)+p([X=1]\cap T) \\ &= p(D)\cdot p_D[X=1]+p(T)\cdot p_T[X=1] \\ &= \frac{3}{5}\times\frac{6}{10}+\frac{2}{5}\times\frac{6}{10}=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

لدينا :
$$\begin{aligned} p[X=2] &= p([X=2]\cap D)+p([X=2]\cap T) \\ &= p(D)\cdot p_D[X=2]+p(T)\cdot p_T[X=2] \\ &= \frac{3}{5}\times\frac{1}{10}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{50}\end{aligned}$$

إذن قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$P_X:\ \{0;1;2\}\ \longmapsto\ [0,1]$$
$$\begin{aligned} P_X(0) &= \tfrac{11}{50} \\ P_X(1) &= \tfrac{3}{5} \\ P_X(2) &= \tfrac{9}{50}\end{aligned}$$

و للتأكد من صحة النتائج يجب دائما تحقيق التوازن التالي :

$$P_X(0)+P_X(1)+P_X(2)=1$$

2

لدينا :
$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{k=2} k\cdot p[X=k] \\ &= 0\times p[X=0]+1\times p[X=1]+2\times p[X=2] \\ &= \left(0\times\frac{11}{50}\right)+\left(1\times\frac{3}{5}\right)+\left(2\times\frac{9}{50}\right) \\ &= \frac{3}{5}+\frac{18}{50}=\frac{24}{25}\end{aligned}$$

التمرين الرابع :

1

لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+2z+(1+i)=0$

لدينا : $\Delta = 2^2-4(1+i)=-4i=2(-2i)=2(1-i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين معرفين بما يلي :

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{-2-\sqrt{2}(1-i)}{2}=-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2=\dfrac{-2+\sqrt{2}(1-i)}{2}=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

2 أ

$$\begin{aligned} \frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i &= -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{i3\pi}{4}}\end{aligned}$$

2 ب

لدينا :
$$\begin{aligned} aff(M_1)-aff(A) &= \left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(-1) \\ &= \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-0 \\ &= aff(B)-aff(O)\end{aligned}$$

حصلنا إذن على : $aff(M_1)-aff(A)=aff(B)-aff(O)$

إذن باستعمال الكتابة المتجهية نجد : $\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{OB}$

من جهة ثانية لدينا :
$$\begin{aligned} \frac{aff(M_2)+aff(M_1)}{2} &= \frac{\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} \\ &= -1=aff(A)\end{aligned}$$

إذن : النقطة A هي منتصف القطعة $[M_1M_2]$.

و بالتالي : نرسم النقطة A باستعمال المعلومة : $aff(A)=-1$

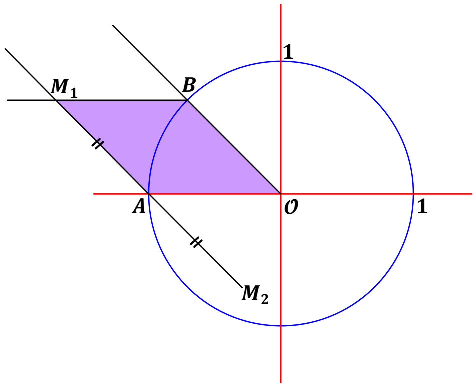
و نرسم النقطة B باستعمال المعلومة : $aff(B)=e^{\frac{i3\pi}{4}}$

و نرسم النقطة M_1 باستعمال المعلومة : $\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{OB}$

و نرسم النقطة M_2 باستعمال المعلومة : A منتصف $[M_1M_2]$.

جمعية طريقكم لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل YOUR WAY

و بذلك نحصل على الشكل التالي



2 ج

بما أن : $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{OB}$ فإن الرباعي $AOBM_1$ متوازي أضلاع .

إذن : كل ضلعين متقابلين فيه متقايسان .

يعني : $AM_1 = OB$ و $AO = M_1B$.

من جهة ثانية لدينا : $OA = |aff(A) - aff(O)| = 1$

و لدينا : $OB = |aff(B) - aff(O)| = \left|e^{\frac{i3\pi}{4}} - 0\right| = 1$

إذن : $AO = OB$.

و بالتالي : $AM_1 = OB = AO = M_1B$

و منه حسب تعريف المعين نستنتج أن $AOBM_1$ معين لأن جميع أضلاعه متقايسة .

و بما أن الرباعي M_1BOA معين

فإنه حسب خاصية القطرين : $(OM_1) \perp (AB)$.

و منه $[OM_1)$ هو منصف الزاوية $A\hat{O}B$.

و بما أن : $A\hat{O}B = \frac{\pi}{4}$ فإن : $M_1\hat{O}B = \frac{\pi}{8}$

و منه : $\arg(z_1) \equiv \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right) \; [2\pi]$

يعني : $\arg(z_1) \equiv \frac{7\pi}{8} \; [2\pi]$

التمرين الخامس :

I 1

لنحل المعادلة التفاضلية : $(H) : y'' - 2y' + y = 0$

من أجل ذلك نحل أولا معادلتها المميزة : $(C) : \; r^2 - 2r + 1 = 0$

هذه المعادلة تصبح : $(r-1)^2 = 0$ يعني : $r = 1$

إذن المعادلة تقبل حلا مزدوجا $r = 1$.

و منه فإن المعادلة (H) تقبل الحل y_H المعرف بما يلي :

$$y_H = (Ax + B)e^x \; ; \; (A,B) \, \epsilon \, \mathbb{R}^2$$

I 2 أ

ليكن $y_p(x) = ax + b$ حلا خاصا للمعادلة (E) .

إذن : $y_p''(x) - 2y_p'(x) + y_p(x) = (x-1)$

يعني : $0 - 2 \times (0) + (ax + b) = (x - 1)$

يعني : $ax + (b - 2a) = 1x + (-1)$

إذن : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -1 \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

إذن : $y_p(x) = x + 1$ حل خاص للمعادلة التفاضلية (E) .

I 2 ب

الحل العام للمعادلة (E) يكتب على الشكل : $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$

بحيث : $y_p(x)$ حل خاص للمعادلة (E) و $y_H(x)$ هو حل المعادلة (H) .

إذن : $y(x) = (Ax + B)e^x + (x + 1) \; ; \; (A,B) \, \epsilon \, \mathbb{R}^2$

I 2 ج

في السؤال ب) حصلنا على الحل العام .

ليكن h الحل الذي يحقق الشروط البدئية التالية : $h(0) = 0$ و $h'(0) = 1$

لدينا : $\begin{cases} h(x) = (Ax + B)e^x + (x + 1) \\ h'(x) = Ae^x + (Ax + B)e^x + 1 \end{cases} \; ; \; (A,B) \, \epsilon \, \mathbb{R}^2$

و بما أن : $\begin{cases} h(0) = 0 \\ h'(0) = 1 \end{cases}$ فإن : $\begin{cases} Be^0 + (0 + 1) = 0 \\ Ae^0 + Be^0 + 1 = 1 \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} B + 1 = 0 \\ A + B + 1 = 1 \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} B = -1 \\ A = 1 \end{cases}$

إذن : $h(x) = (x - 1)e^x + (x + 1)$ هو الحل الذي نبحث عنه .

و أشير إلى أن المقدار $h(0)$ يشير عادة (في الميكانيك النيوتونية) إلى الوضعية البدئية لمتحرك ما (*la position initiale*) .

و يشير المقدار $h'(0)$ إلى السرعة البدئية (*la vitesse initiale*) و المتغير x يكون عادة الزمن .

I 3 أ

ليكن x عنصرا من المجال $[0; +\infty[$.

لدينا : $g(x) = (x - 1)e^x + (x - 1)$

إذن : $g'(x) = e^x + (x - 1)e^x + 1 = xe^x + 1$

بما أن x عنصر من $[0; +\infty[$

فإن : $x \geq 0$ و منه : $xe^x + 1 > 0$

يعني : $\forall \, x \, \epsilon \, [0; +\infty[\; ; \; g'(x) > 0$

إذن : g دالة تزايدية على المجال $[0; +\infty[$.

I 3 ب

و جدنا أن الدالة g تزايدية على المجال $[0; +\infty[$.

لدينا : $\forall \, x \, \epsilon \, [0; +\infty[\; ; \; x \geq 0$

إذن : $\forall \, x \, \epsilon \, [0; +\infty[\; ; \; g(x) \geq g(0)$

من جهة أخري لدينا : $g(0) = (0 - 1)e^0 + (0 + 1) = 0$

و بالتالي : $\forall \, x \, \epsilon \, [0; +\infty[\; ; \; g(x) \geq 0$

II 1

ليكن x عددا حقيقيا غير منعدم .

لدينا :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-xe^{-x}}{(e^{-x} - 1)^2} = \frac{-xe^{-x}}{(e^{-x} - 1)^2} \times \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \\ &= \frac{-xe^x}{[e^x(e^{-x} - 1)]^2} = \frac{-xe^x}{(1 - e^x)^2} \\ &= \frac{-xe^x}{(e^x - 1)^2} = -f(x) \end{aligned}$$

و بما أن : $f(-x) = -f(x)$ فإن f دالة فردية و تمثيلها المبياني يجب أن يكون متماثلا بالنسبة للنقطة O أصل المَعلَم .

II 2 أ

في البداية لدينا : $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x-e^0}{x-0}\right)=e^0=1$

و هذه النتيجة تأتي عن طريق اشتقاق الدالة e^x بجوار الصفر .

لدينا :

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\underbrace{\left(\frac{e^x}{x}\right)}_{0^+\ \searrow\ +\infty}\times\frac{1}{\left(\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{0^+\ \searrow\ \mathbf{1}}\right)^2}$$

$$=(+\infty)\times\frac{1}{1^2}=+\infty$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (أي محور الأراتيب) مقارب عمودي للمنحنى .

II 2 ب

لحساب هذه النهاية أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x}{e^{2x}-2e^x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^{2x}}{xe^x}-\frac{2e^x}{xe^x}+\frac{1}{xe^x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{2}{x}+\frac{1}{xe^x}}\right)=\frac{1}{+\infty}=0$$

الطريقة الثانية :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{[e^x(1-e^{-x})]^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x}{e^{2x}(1-e^{-x})^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x(1-e^{-x})^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{\left(\frac{e^x}{x}\right)}_{+\infty\ \searrow\ +\infty}}\times\frac{1}{\left(1-\underbrace{e^{-x}}_{+\infty\ \searrow\ 0^+}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{+\infty}\times\frac{1}{(1-0^+)^2}=0\times1=0$$

إذن من النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ نستنتج أن محور الأفاصيل مقارب أفقي لـ $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

II 3 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x)=\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}$

إذن :

$$f'(x)=\frac{xe^x(e^x-1)^2-2(e^x-1)'(e^x-1)(xe^x)}{(e^x-1)^4}$$

$$=\frac{(e^x+xe^x)(e^x-1)^2-2e^x(e^x-1)(xe^x)}{(e^x-1)^4}$$

$$=\frac{(e^x-1)[(e^x+xe^x)(e^x-1)-2xe^{2x}]}{(e^x-1)^4}$$

$$=\frac{[e^x(1+x)(e^x-1)-2xe^{2x}]}{(e^x-1)^3}$$

$$=\frac{-e^x\big(2xe^x-(1+x)(e^x-1)\big)}{(e^x-1)^3}$$

$$=\frac{-e^x(2xe^x+1-e^x-xe^x+x)}{(e^x-1)^3}$$

$$=\frac{-e^x\big(xe^x-e^x+(x+1)\big)}{(e^x-1)^3}$$

$$=\frac{-e^x\big((x-1)e^x+(x+1)\big)}{(e^x-1)^3}=\frac{-e^xg(x)}{(e^x-1)^3}$$

و بالتالي : $(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\frac{-e^xg(x)}{(e^x-1)^3}$

II 3 ب

لدينا : $(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\frac{-e^xg(x)}{(e^x-1)^3}$

لدينا حسب السؤال I) 3) ب) : $\forall\ x\ \epsilon\ [0;+\infty[\ ;\ g(x)\geq0$

إذن : $\forall\ x\ \epsilon\ ]0;+\infty[\ ;\ g(x)>0$

و لدينا : $x>0$ إذن : $e^x>0$ و $e^x-1>0$

نستنتج إذن من هذه النتائج أن : $(\forall x>0)\ ;\ \frac{-e^xg(x)}{(e^x-1)^3}<0$

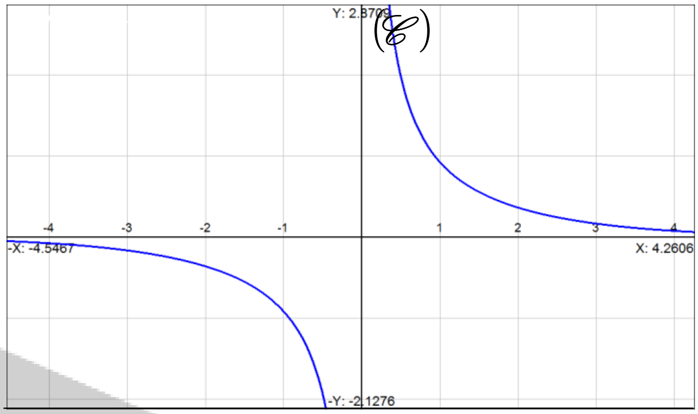
إذن : $\forall\ x\ \epsilon\ ]0;+\infty[\ ;\ f'(x)<0$

و منه : f دالة تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

II 4



II 5 أ

لدينا : $(\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\})\ ;\ \frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{(t-1)} - \frac{1}{t}$

إذن : $\int_2^3 \frac{1}{t(t-1)}\,dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)dx$

$$= \int_2^3 \frac{1}{t-1}\,dx - \int_2^3 \frac{1}{t}\,dx$$

$$= [\ln(t-1)]_2^3 - [\ln t]_2^3$$

$$= (\ln 2 - \ln 1) - (\ln 3 - \ln 2) = 2\ln 2 - \ln 3$$

II 5 ب

نضع : $t = e^x$ إذن : $\frac{dt}{dx} = e^x = t$ يعني : $dx = \frac{dt}{t}$

إذا كان : $x = \ln 2$ فإن : $t = 2$

إذا كان : $x = \ln 3$ فإن : $t = 3$

و بالتالي : $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx = \int_2^3 \frac{t\ln t}{(t-1)^2}\cdot\frac{dt}{t} = \int_2^3 \frac{\ln t}{(t-1)^2}\,dt$

II 6 أ

$$\int_2^3 \frac{\ln t}{(t-1)^2}\,dt = \int_2^3 \underbrace{(\ln t)}_{u}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{(t-1)^2}\right)}_{v'}dt = [uv] - \int u'v$$

$$= \left[(\ln t)\left(\frac{-1}{t-1}\right)\right]_2^3 - \int_2^3 \left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t-1}\right)dt$$

$$= \left[\frac{-\ln t}{t-1}\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{1}{t(t-1)}\,dt$$

$$= \left(\frac{-\ln 3}{2} + \ln 2\right) + (2\ln 2 - \ln 3)$$

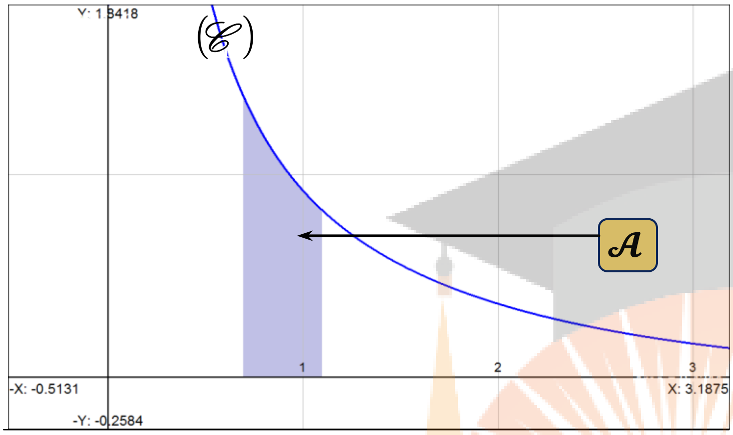
$$= 3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$$

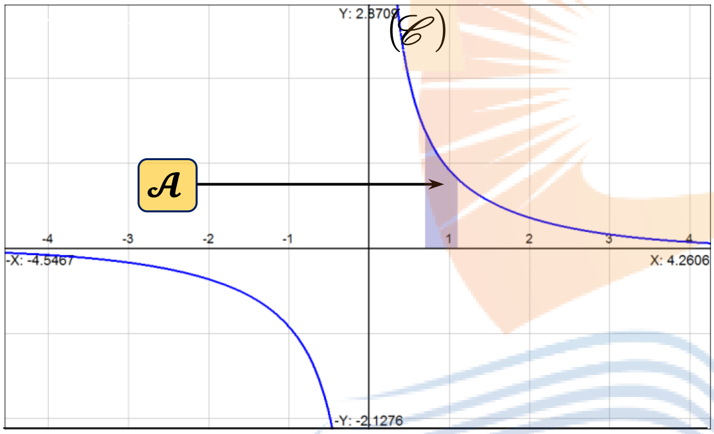
II 6 ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى و محور الأفاصيل و المستقيمين $x = \ln 2$ و $x = \ln 3$.

إذن : $\mathcal{A} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx = \int_2^3 \frac{\ln t}{(t-1)^2}\,dt$

$$= 3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 \approx 0,431$$





طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه
وإرشاد شباب المستقبل

الإمتحـــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريـــا
الدورة العـــادية 2007

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الإمتحانات

مـــادة الريـــاضيات
العلوم التجـــريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجـــية بمسلكيها
مدة الانجاز 3h - المعامل 7

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ الفلكة $(\mathcal{S})$
التي معادلتها هي : $(\mathcal{S})\ :\ x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$
و المستوى $(\mathcal{P})$ الذي معادلته : $(\mathcal{P})\ :\ x-y+2z+1=0$.

1,00 ن — **1** بين أن مركز الفلكة $(\mathcal{S})$ هي النقطة $\Omega(1,2,3)$ و أن شعاعها يساوي $\sqrt{6}$

0,75 ن — **2** تحقق من أن المستوى $(\mathcal{P})$ مماس للفلكة $(\mathcal{S})$.

0,50 ن — **3** أ حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على $(\mathcal{P})$.

0,75 ن — **3** ب حدد مثلوث احداثيات النقطة H نقطة تماس $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{S})$.

التمرين الثاني : (3,0 ن)

0,50 ن — **1** أ أكتب على الشكل الجبري العدد العقدي $(3-2i)^2$

1,00 ن — **1** ب حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2-2(4+i)z+10+20i=0$

2 نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B
و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=1+3i$ و $b=7-i$ و $c=5+9i$.

0,50 ن — **2** أ بين أن : $\frac{c-a}{b-a}=i$

1,00 ن — **2** ب استنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية .

التمرين الثالث : (2,5 ن)

0,50 ن — **1** تحقق من أن : $\forall\ x\ \mathbb{R}\backslash\{-1\}\ ;\ \dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}$

1,00 ن — **2** بين أن : $\displaystyle\int_0^2\left(\frac{x^2}{x+1}\right)dx=\ln 3$

1,00 ن — **3** باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\displaystyle\int_0^2 x\ln(x+1)\,dx=\frac{3}{2}\ln 3$

التمرين الرابع : (2,5 ن)

يحتوي كيس على سبع بيدقات تحمل الأعداد 0 و 0 و 0 و 1- و 1 و 1 و 1 (لا يمكن التمييز بينها باللمس). نعتبر التجربة العشوائية التالية : ' نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث بيدقات من الكيس .
نعتبر الأحداث التالية :

A . " لا توجد أية بيدقة تحمل العدد 0 من بين البيدقات الثلاث المسحوبة " .
B . " سحب ثلاث بيدقات تحمل أعداد مختلفة مثنى مثنى" .
C . "مجموع الأعدد المسجلة على البيدقات المسحوبة منعدم " .

2,50 ن — **1** أحسب احتمال كل من الحدثين A و B ثم بين أن احتمال الحدث C هو $\frac{2}{7}$.

طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه والارشاد سبيل المستقبل

التمرين الخامس : (9 ن)

I نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = e^{-x} + x - 1$.

I **1** احسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج أن g تزايدية على $[0\ ;\ +\infty[$ و تناقصية على $]-\infty, 0]$. 0,75 ن

I **2** بين أن $g(x) \geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ (لاحظ أن $g(0) = 0$) 0,50 ن
ثم استنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ e^{-x} + x \geq 1$

II نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{x + e^{-x}}$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

II **1** بين أن حيز تعريف الدالة f هو $\mathbb{R}$ (استعمل نتيجة السؤال **I** **2**). 0,50 ن

II **2** أ بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ f(x) = \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{xe^{x}}\right)}$ 0,25 ن

II **2** ب بين أن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ثم أوّل النتيجة مبيانيا . 0,50 ن

II **3** أ بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = \dfrac{(x+1)e^{-x}}{(x + e^{-x})^2}$ 0,75 ن

II **3** ب أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f . 0,50 ن

II **4** أ أكتب معادلة المماس للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة O أصل المعلم. 0,50 ن

II **4** ب تحقق من أن : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ x - f(x) = \dfrac{xg(x)}{g(x) + 1}$ ثم أدرس إشارة $(x - f(x))$ على $\mathbb{R}$. 0,75 ن

II **4** ج استنتج الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم $(\Delta)\ :\ y = x$. 0,25 ن

II **5** أنشئ (Δ) و $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (نأخذ : $\frac{1}{1-e} \approx -0,6$) . 1,00 ن

III نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N})\ :\ u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases}$

III **1** بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq u_n \leq 1$ 0,50 ن

III **2** بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية (استعمل نتيجة السؤال **II** **4** ب) . 0,50 ن

III **3** استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة ثم حدد نهايتها . 0,75 ن

YOUR WAY
طريقكم للتوجيه
وإرشاد شباب المستقبل

أجوبة امتحان الدورة العادية 2007

التمرين الأول :

1

لدينا $(\mathcal{S})$ مُعرفة بـ : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$

يعني : $(x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2-6z)=-8$

يعني : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\left(\sqrt{6}\right)^2$

إذن : $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1;2;3)$ و شعاعها $r=\sqrt{6}$.

2

لدينا : $\Omega(1,2,3)$ و $(\mathcal{P}): x-y+2z+1=0$

إذن : $d(\Omega,(\mathcal{P}))=\dfrac{|1-2+2\times3+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}=r$

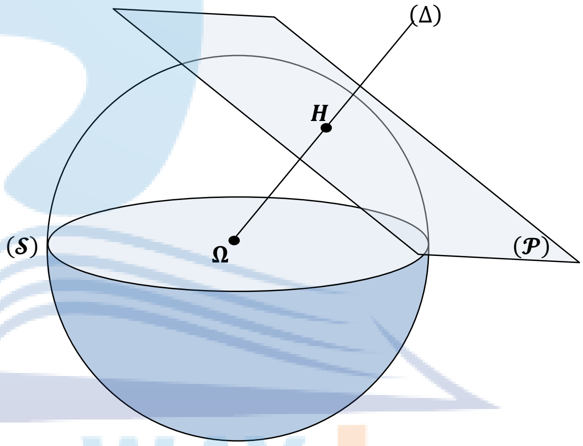
بما أن : $d(\Omega,(\mathcal{P}))=r$

فإن المستوى $(\mathcal{P})$ مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة $H(\alpha,\beta,\gamma)$.

3 أ

لدينا : $(\mathcal{P}): x-y+2z+1=0$

إذن : $\vec{n}(1,-1,2)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$.



لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (Δ) .

إذن : $\overrightarrow{\Omega M}(x-1\,;y-2\,;z-3)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) .

و بما أن (Δ) عمودي على المستوى $(\mathcal{P})$.

فإن المتجهتان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{\Omega M}$ متجهتان مستقيميتان .

إذن يوجد عدد حقيقي t بحيث : $\overrightarrow{\Omega M}=t\,\vec{n}$.

يعني : $\begin{cases} x-1=t \\ y-2=-t \\ z-3=2t \end{cases}\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})$

يعني : $\begin{cases} x=t+1 \\ y=2-t \\ z=2t+3 \end{cases}\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})$

و هذه النظمة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) باستعمال البارامتر الحقيقي t .

3 ب

ننطلق من كون $H(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة تماس الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى $(\mathcal{P})$.

إذن : $H\epsilon(\Delta)$ و $H\epsilon(\mathcal{P})$.

يعني : $\begin{cases} \alpha=1+t \\ \beta=2-t \\ \gamma=2t+3 \\ \alpha-\beta+2\gamma+1=0 \end{cases}\ ;\ (\exists!\,t\,\epsilon\,\mathbb{R})$

يعني : $(1+t)-(2-t)+2(3+2t)+1=0$

يعني : $6t+6=0$ يعني : $t=-1$

و بالتالي : $H(0,3,1)$ هي نقطة تماس الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى $(\mathcal{P})$.

التمرين الثاني :

1 أ

$$(3-2i)^2 = 3^2-2(3)(2i)+(2i)^2$$
$$= 9-12i-4 = 5-12i$$

ملاحظة : معظم الأسئلة التي تُطرحُ بهذا الشكل البسيط لا يكون الهدف منها الحساب فقط بل يكون الغرض منها التوظيف في الأسئلة الموالية .

1 ب

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2(4+i)z+10+20i=0$.

لدينا : $\Delta=\left(-2(4+i)\right)^2-4(10+20i)$

$= (60+32i)-(40+80i)=20-48i$

$= 4(5-12i)=\left(2(3-2i)\right)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين z_1 و z_2 كما يلي :

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{2(4+i)-2(3-2i)}{2}=1+3i \\ z_2=\dfrac{2(4+i)+2(3-2i)}{2}=7-i \end{cases}$$

2 أ

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{(5+9i)-(1+3i)}{(7-i)-(1+3i)}=\frac{4+6i}{6-4i}=\frac{i(6-4i)}{(6-4i)}=i$$

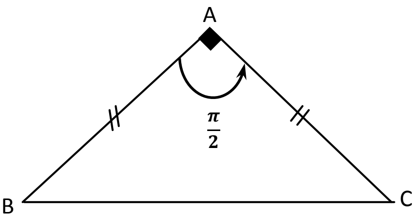
2 ب

ننطلق من النتيجة : $\dfrac{c-a}{b-a}=i=e^{\frac{i\pi}{2}}$

إذن : $\begin{cases} \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=1 \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} |c-a|=|b-a| \\ \arg\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} AC=AB \\ B\hat{A}C=90° \end{cases}$

و بالتالي : المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في نفس النقطة A .



YOUR WAY
توجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الثالث :

1

ليكن x عددا حقيقيا مخالفا للعدد -1

$$(x-1)+\frac{1}{(x+1)}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)}+\frac{1}{(x+1)}$$
$$=\frac{x^2-1}{(x+1)}+\frac{1}{(x+1)}=\frac{x^2}{(x+1)}$$

2

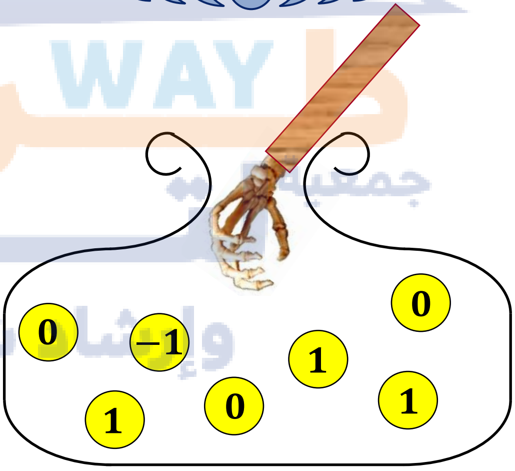
$$\int_0^2\left(\frac{x^2}{x+1}\right)dx=\int_0^2\left((x-1)+\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)dx$$
$$=\int_0^2(x-1)dx+\int_0^2\left(\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2+[\ln(x+1)]_0^2$$
$$=(0)+(\ln 3-\ln 1)=\ln 3$$

3

$$\int_0^2\underbrace{x}_{u'}\,\underbrace{\ln(x+1)}_{v}\,dx=[uv]-\int uv'$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^2-\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=2\ln 3-\frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{x^2}{x+1}\right)dx$$
$$=2\ln 3-\frac{1}{2}(\ln 3)=\frac{3}{2}\ln 3$$

التمرين الرابع :

1



عندما نسحب عشوائيا في آن واحد ثلاث بيدقات من كيس يضم 7 بيدقات فإن التجربة العشوائية تَحتمِلُ C_7^3 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega)=C_7^3=35$ بحيث Ω هو كون الإمكانيات .

نعتبر الحدث A المعرف بما يلي :

$A=\{$ لا توجد أية بيدقة تحمل 0 من بين البيدقات الثلاث المسحوبة $\}$

إذن :
$$A=\left\{\text{البيدقتان الثلاث تحمل العدد 1}\quad\text{أو}\quad\text{بيدقتان تحملان العدد 1 و الأخرى تحمل }-1\right\}$$

و منه :
$$p(A)=p\left(\text{البيدقتان الثلاث تحمل العدد 1}\right)+p\left(\text{بيدقتان تحملان العدد 1 و الأخرى تحمل }-1\right)$$
$$=\frac{C_3^3}{35}+\frac{C_3^2\times C_1^1}{35}=\frac{1}{35}+\frac{3}{35}=\frac{4}{35}$$

نعتبر الحدث الثاني B المعرف بما يلي :

$B=\{$ سحب ثلاث بيدقات تحمل أعدادا مختلفة مثنى مثنى $\}$

$$=\left\{\text{كرة تحمل العدد 0}\quad\text{و}\quad\text{كرة تحمل العدد 1}\quad\text{و}\quad\text{كرة تحمل العدد }-1\right\}$$

إذن :
$$p(B)=\frac{C_3^1\times C_3^1\times C_1^1}{35}=\frac{9}{35}$$

نعتبر الحدث الأخير C المعرف بما يلي :

$C=\{$ مجموع الأعداد المسجلة على البيدقات المسحوبة يساوي 0 $\}$

نلاحظ أن هناك حالتين يتحقق فيهما الحدث C و هما :

الحالة الأولى : 0 0 0

الحالة الثانية : -1 1 0

إذن :
$$p(C)=p\left(\text{ثلاث كرات تحمل الصفر}\quad\text{أو}\quad\text{كرة تحمل العدد 0 و كرة تحمل العدد 1 و كرة تحمل العدد }-1\right)$$
$$=p\left(\text{ثلاث كرات تحمل الصفر}\right)+p\left(\text{كرة تحمل العدد 0 و كرة تحمل العدد 1 و كرة تحمل العدد }-1\right)$$
$$=\frac{C_3^3}{35}+\frac{C_3^1\times C_3^1\times C_1^1}{35}=\frac{1}{35}+\frac{9}{35}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$$

التمرين الخامس :

1 I

ليكن x عددا حقيقيا . لدينا : $g(x)=e^{-x}+x-1$

إذن : $g'(x)=-e^x+1$

إذا كان : $x\geq 0$ فإن : $e^x\geq e^0$ يعني : $e^x\geq 1$

و منه : $(\forall x\geq 0)\ ;\ 1-e^x\leq 0$

إذن : $(\forall x\geq 0)\ ;\ g'(x)\leq 0$

و منه : g دالة تناقصية على المجال $[0;+\infty[$.

إذا كان : $x\leq 0$ فإن : $e^x\leq e^0$ يعني : $e^x\leq 1$

يعني : $(\forall x\leq 0)\ ;\ 1-e^x\geq 0$

إذن : $(\forall x\leq 0)\ ;\ g'(x)\geq 0$

و منه : g دالة تزايدية على المجال $]-\infty;0]$.

2 I

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $g(0)=0$ و نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان $x\geq 0$.

إذن : $g(x)\geq g(0)$ لأن : g دالة تزايدية على المجال $[0;+\infty[$.

YOUR WAY
وإرشاد شباب المستقبل

و بالتالي : $\boxed{\forall\, x \in [0;+\infty[\;\;;\;\; g(x) \geq 0}$ **(1)**

الحالة الثانية : إذا كان $x \leq 0$.

إذن : $g(x) \geq g(0)$ لأن : g دالة تناقصية على المجال $]-\infty;0]$.

و بالتالي : $\boxed{\forall\, x \in\,]-\infty;0] \;\;;\;\; g(x) \geq 0}$ **(2)**

إذن : من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall x\in\mathbb{R}) \;;\; g(x) \geq 0$.

و منه : $(\forall x\in\mathbb{R}) \;;\; e^{-x} + x - 1 \geq 0$

يعني : $(\forall x\in\mathbb{R}) \;;\; e^{-x} + x \geq 1$.

II 1

نعلم أن : $(\forall x\in\mathbb{R}) \;;\; e^{-x} + x \geq 1$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R}) \;;\; e^{-x} + x \neq 0$.

و منه فإن الدالة f معرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كلها .

II 2 أ

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R}) \;;\; \dfrac{x}{x+e^{-x}} = f(x)$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R}) \;;\; \dfrac{x}{x\left(1+\dfrac{e^{-x}}{x}\right)} = f(x)$

يعني : $(\forall x\in\mathbb{R}) \;;\; \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{xe^{x}}\right)} = f(x)$

II 2 ب

لدينا :
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{xe^{x}}\right)} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{0^-}\right)} = \frac{1}{1+(-\infty)} = \frac{1}{-\infty} = 0^- = 0$$

و بالتالي : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

يعني أن المستقيم $(y=0)$ أي محور الأفاصيل مقارب أفقي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$.

و لدينا كذلك :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{xe^{x}}}\right) = \left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{+\infty}}\right) = \frac{1}{1+0} = 1$$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

يعني أن المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

II 3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $f(x) = \dfrac{x}{x+e^{-x}}$

إذن :
$$f^{'}(x) = \frac{(x+e^{-x}) - x(1-e^{-x})}{(x+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}+xe^{-x}}{(x+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}(1+x)}{(x+e^{-x})^2}$$

و بالتالي : $(\forall x\in\mathbb{R}) \;;\; f^{'}(x) = \dfrac{e^{-x}(1+x)}{(x+e^{-x})^2}$

II 3 ب

رأينا حسب السؤال I (2) أنه : $(\forall x\in\mathbb{R}) \;;\; e^{-x} + x \geq 1 > 0$

و لدينا كذلك : $(\forall x\in\mathbb{R}) \;;\; e^{-x} \geq 0$.

إذن إشارة $f^{'}(x)$ تتعلق فقط بإشارة $(x+1)$.

- إذا كان : $x = -1$ فإن : $f^{'}(x) = 0$
- إذا كان : $x > -1$ فإن : $f^{'}(x) > 0$
- إذا كان : $x < -1$ فإن : $f^{'}(x) < 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$\frac{1}{1-e}$	$\nearrow$	1

II 4 أ

معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة ذات الأفصول 0

تكتب على الشكل : $(\Delta) \;:\; y = f^{'}(0)(x-0) + f(0)$

يعني : $(\Delta) \;:\; y = 1(x-0) + 0$ إذن : $(\Delta) \;:\; y = x$

II 4 ب

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا :

$$\frac{xg(x)}{g(x)+1} = \frac{x(e^{-x}+x-1)}{(e^{-x}+x-1)+1} = \frac{xe^{-x}+x^2-x}{e^{-x}+x}$$
$$= \frac{x(e^{-x}+x)}{(e^{-x}+x)} - \frac{x}{e^{-x}+x}$$
$$= x - \frac{x}{e^{-x}+x} = x - f(x)$$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R}) \;;\; x - f(x) = \dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$

لدينا حسب السؤال I (2 : $(\forall x\in\mathbb{R}) \;;\; g(x) \geq 0$

إذن : $\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$ كمية موجبة كيفما كان x من $\mathbb{R}$.

و بالتالي إشارة الفرق $(x - f(x))$ تتعلق فقط بإشارة x .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة الفرق $x - f(x)$		$-$	0	$+$	

II 4 ج

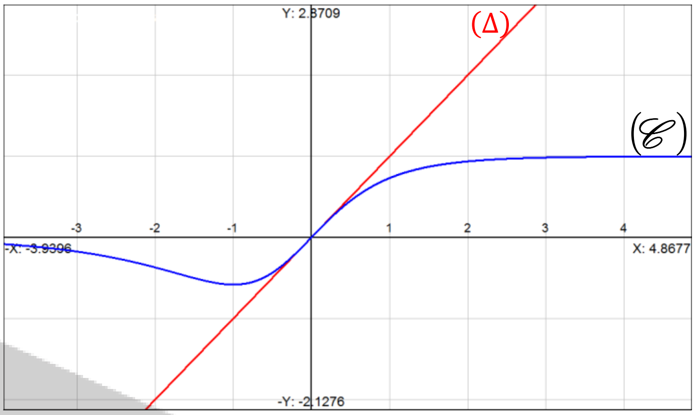
يُبَيِّنُ الجدول التالي الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم $(\Delta) : y = x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x - f(x)$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ)		المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد أسفل المستقيم (Δ)	$(\mathscr{C})$ و (Δ) يتقاطعان في O	المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد فوق المستقيم (Δ)	

طريقك YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

5 II

التمثيل المبياني للدالة f .



1 III

نعتبر الخاصية (P) التالية : $(P) : (\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 0 \leq u_n \leq 1$

لدينا : $0 \leq 1 \leq 1$ إذن : $0 \leq u_0 \leq 1$

يعني أن الخاصية (P) صحيحة من أجل $n = 0$.

نفترض أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 0 \leq u_n \leq 1$.

بما أن الدالة f تزايدية على المجال $[-1; +\infty[$.

فإن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ : \ f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$

يعني : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 0 \leq f(u_n) \leq \dfrac{e}{e+1}$

و نعلم أن : $e < 1 + e$ إذن : $\dfrac{e}{e+1} < 1$

و منه : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 0 \leq f(u_n) \leq \dfrac{e}{e+1} < 1$

يعني : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 0 \leq u_{n+1} \leq 1$

و هذا يعني أن الخاصية (P) صحيحة من أجل $(n+1)$.

و بالتالي حسب مبدأ الترجع في $\mathbb{N}$: $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 0 \leq u_n \leq 1$.

2 III

لدينا حسب جدول الإشارة الوارد في السؤال II) 4) ب) :

$$\boxed{(\forall x \geq 0) \ ; \ x \geq f(x)} \quad (*)$$

لدينا : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ u_n \geq 0$

إذن حسب $(*)$: $u_n \geq f(u_n)$

يعني أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ u_n \geq u_{n+1}$

و بالتالي : $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

3 III

لدينا $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية

و كذلك : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 0 \leq u_n \leq 1$ إذن $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ مصغورة بالعدد 0

إذن $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و نهايتها ℓ تحقق : $f(\ell) = \ell$

يعني : $\ell - f(\ell) = 0$ أي : $\dfrac{\ell \cdot g(\ell)}{g(\ell)+1} = 0$

نعلم أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) ; g(x) + 1 \neq 0$ إذن : $\ell \, g(\ell) = 0$

يعني : $g(\ell) = 0$ أو $\ell = 0$.

يعني : $\ell = 0$ أو $\ell = 0$.

و بالتالي : $\lim\limits_{n \infty} u_n = 0$

طريقكم YOUR WAY توجيه وإرشاد شباب المستقبل

الإمتحـــــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريـــــــــــا
الدورة الاستدراكية 2007

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
و تكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

مـــادة الريـــــــاضيات
العلوم التجـــريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجـــية بمسلكيها
مدة الانجاز 3h - المعامل 7

التمرين الأول : (3,5 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

النقط $A(2,0,-1)$ و $B(2,4,2)$ و $C(3,3,3)$ و الفلكة (S) التي معادلتها الديكارتية هي :

$$x^2+y^2+z^2-4x-4y-8z+20=0$$

1,00 ن — 1 — بين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(2,2,4)$ و أن شعاعها يساوي 2 .

ليكن $(\mathcal{P})$ المستوى المار من النقطة A و العمودي على (BC) .

0,75 ن — 2 — بين أن $x-y+z-1=0$ معادلة ديكارتية للمستوى $(\mathcal{P})$.

1,00 ن — 3 — أ — بين أن المستوى $(\mathcal{P})$ يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها يساوي 1 .

0,25 ن — 3 — ب — حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على $(\mathcal{P})$.

0,50 ن — 3 — ج — حدد مثلوث إحداثيات النقطة ω مركز الدائرة (Γ) .

التمرين الثاني : (2,5 ن)

يحتوي كيس على ثلاث بيدقات بيضاء و أربع بيدقات سوداء (لا يمكن التمييز بينها باللمس) .

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث بيدقات من الكيس .

0,75 ن — 1 — ما هو احتمال الحصول على بيدقتين بالضبط لونهما أبيض ؟

0,75 ن — 2 — ما هو احتمال الحصول على ثلاث بيدقات من نفس اللون ؟

1,00 ن — 3 — ما هو احتمال الحصول على بيدقة بيضاء على الأقل ؟.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

لتكن $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\boxed{\begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{5}(u_n-4n-1) \quad ; \quad (\forall n\epsilon\mathbb{N}) \\ u_0=2 \end{cases}}$$

1,00 ن — 1 — نضع : $v_n=u_n+n-1 \; ; \; (\forall n\epsilon\mathbb{N})$ بين أن $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

0,50 ن — 2 — أ — أحسب v_n بدلالة n .

0,50 ن — 2 — ب — استنتج u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\infty} u_n$

نضع : $T_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

1,00 ن — 3 — بين أن : $T_n=\frac{1}{4}\left(5-\frac{1}{5^n}\right)$ و أن $S_n=T_n-\frac{(n+1)(n-2)}{2} \; ; \; (\forall n\epsilon\mathbb{N})$

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الرابع : (3,0 ن)

0,25 ن | 1 | تحقق من أن : $\left(\sqrt{2}+2i\right)^2 = -2+4\sqrt{2}\,i$

0,75 ن | 2 | حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-\left(\sqrt{2}+2\right)z+2+\sqrt{2}-\sqrt{2}i=0$

3 | نعتبر العددين العقديين : $z_1 = 1-i$ و $z_2 = 1+\sqrt{2}+i$

0,50 ن | 3 | أ | حدد الشكل المثلثي للعدد العقدي z_1 .

1,00 ن | 3 | ب | بين أن : $z_1 z_2 = \sqrt{2}.\overline{z_2}$ ($\overline{z_2}$ هو مرافق z_2) .

و استنتج أن : $arg(z_1)+2arg(z_2) \equiv 0\ [2\pi]$

0,50 ن | 3 | ج | حدد عمدة العدد العقدي z_2 .

التمرين الخامس : (8,0ن)

I | لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $\boxed{g(x) = x-\frac{1}{x}-2\ln x}$

1,00 ن | I | 1 | بين أن : $\forall\, x \in\,]0;+\infty[\ ;\ \ g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

ثم استنتج منحى تغيرات الدالة g على $]0\,;\,+\infty[$.

0,50 ن | I | 2 | بين أن : $g(x) \leq 0$ لكل x من $]0\,;1]$ و أن $g(x) \leq 0$ (لاحظ أن : $g(1)=0$)

II | نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $\boxed{f(x) = x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2}$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,75 ن | II | 1 | أ | بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$) ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,25 ن | II | 1 | ب | تحقق من أن : $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)\ \ ;\ (\forall\, x \in\,]0;+\infty[)$

0,50 ن | II | 1 | ج | أحسب $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ (يمكن وضع $t=\frac{1}{x}$) ثم أوّل النتيجة هندسيا .

0,50 ن | II | 1 | د | بين أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المقارب هو $y=x$.

1,50 ن | II | 2 | بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x}\ \ ;\ (\forall\, x \in\,]0;+\infty[)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

1,00 ن | II | 3 | أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن | II | 4 | أ | بين أن الدالة : $G : x \to x\ln x - x$ دالة أصلية للدالة $g : x \to \ln x$ على $]0;+\infty[$

0,75 ن | II | 4 | ب | باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_1^e (\ln x)^e\, dx = e-2$

0,75 ن | II | 4 | ج | حدد مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=1$ و $x=e$.

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2007

التمرين الأول :

1

لدينا $(\mathcal{S})$ فلكة معرفة بالمعادلة الديكارتية التالية :

$$(\mathcal{S}) :\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 8z + 20 = 0$$

يعني : $(\mathcal{S}) :\ (x^2 - 4x) + (y^2 - 4y) + (z^2 - 8z) + 20 = 0$

يعني : $(\mathcal{S}) :\ (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 4$

و بالتالي : $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(2,2,4)$ و شعاعها $R = 2$.

2 أ

لتكن $ax + by + cz + d = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى $(\mathcal{P})$.

بما أن $(\mathcal{P})$ عمودي على (BC) . فإن : $\overrightarrow{BC}(1,-1,1)$ متجهة منظمية منظمية على $(\mathcal{P})$.

و منه نستطيع أن نأخذ : $a = 1$ و $b = -1$ و $c = 1$

إذن المعادلة الديكارتية لـ $(\mathcal{P})$ تُصبح : $(\mathcal{P}) :\ x - y + z + d = 0$

و بما أن : $A \in (\mathcal{P})$ فإن : $2 - 0 - 1 + d = 0$ يعني : $d = -1$

إذن المعادلة الديكارتية لـ $(\mathcal{P})$ تصبح : $(\mathcal{P}) \ ;\ x - y + z - 1 = 0$

2 ب

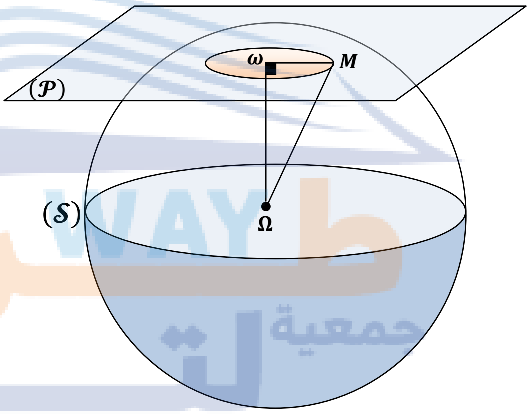
لدينا : $\Omega(2,2,4)$ و $(\mathcal{P}) : x - y + z - 1 = 0$

إذن : $d\big(\Omega, (\mathcal{P})\big) = \dfrac{|2-2+4-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

و بما أن : $\sqrt{3} < 2$ يعني : $d\big(\Omega, (\mathcal{P})\big) < R$

فإن $(\mathcal{P})$ يقطع $(\mathcal{S})$ وفق دائرة (Γ) شعاعها r . و مركزها (α,β,γ) .

لحساب r نستعين بالشكل التالي :



لتكن M نقطة من (Γ) . يعني : $M \in (\mathcal{P})$ و $M \in (\mathcal{S})$.

إذن : $\omega M = r$ و $(\Omega\omega) \perp (\omega M)$ و $\Omega M = R = 2$.

و منه حسب مبرهنة فيتاغورس في المثلث $\Omega M \omega$ القائم الزاوية في ω

نجد : $\Omega M^2 = \omega\Omega^2 + \omega M^2$

يعنى : $2^2 = \big(\sqrt{3}\big)^2 + r^2$ يعنى : $r^2 = 1$ إذن : $r = 1$

2 ج

ليكن (Δ) المستقيم المار من $\Omega(2,2,4)$ و العمودي على المستوى $(\mathcal{P})$.

لدينا : $(\mathcal{P}) : x - y + z - 1 = 0$

إذن $\vec{n}(1\,,-1\,,1)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$.

لتكن $M(x,y,z) \in (\Delta)$

بما أن : $(\Delta) \perp (\mathcal{P})$ فإن المتجهتان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{\Omega M}$ مستقيميتان .

و منه يوجد عدد حقيقي t بحيث : $\overrightarrow{\Omega M} = t\,\vec{n}$.

يعني : $\begin{cases} x - 2 = t \\ y - 2 = -t \\ z - 4 = t \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

لدينا حسب الشكل السابق : $(\Omega\omega) \perp (\mathcal{P})$ و $(\Delta) \perp (\mathcal{P})$.

و بما أن (Δ) و $\omega\Omega$ يشتركان في النقطة Ω .

فإن : $\omega(\alpha,\beta,\gamma) \in (\Delta)$

و لدينا : $(\Delta) : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t + 2 \ ;\ (t \in \mathbb{R}) \\ z = t + 4 \end{cases}$

إذن : $(\exists t_0 \in \mathbb{R}) :\ \begin{cases} \alpha = t_0 + 2 \\ \beta = -t_0 + 2 \\ \gamma = t_0 + 4 \end{cases}$

و نعلم كذلك أن : $\omega(\alpha,\beta,\gamma) \in (\mathcal{P})$ إذن : $\alpha - \beta + \gamma - 1 = 0$

و بالتالي : $(t_0 + 2) - (-t_0 + 2) + (t_0 + 4) - 1 = 0$

يعني : $3t_0 + 3 = 0$ يعني : $t_0 = -1$

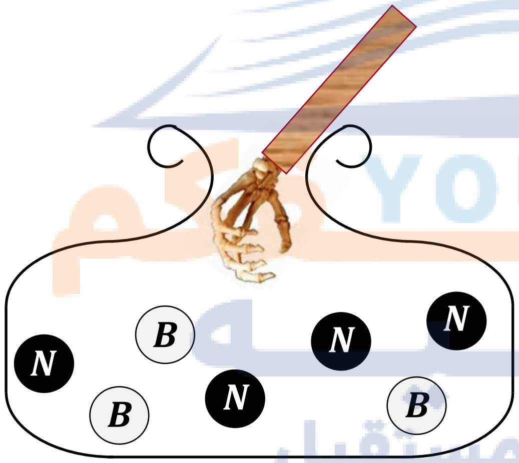
يعني : $\begin{cases} \alpha = -1 + 2 = 1 \\ \beta = -(-1) + 2 = 3 \\ \gamma = -1 + 4 = 3 \end{cases}$

إذن : $\omega(1,3,3)$ هي مركز الدائرة (Γ) .

التمرين الثاني :

1

عندما نسحب عشوائيا ثلاث بيدقات من كيس يضم سبع بيدقات فإن النتيجة تحتمل C_7^3 إمكانية . يعني : $card(\Omega) = C_7^3 = 35$ بحيث : Ω هو كون الامكانيات .



$$p\left(\begin{array}{c}\text{الحصول على}\\ \text{بيدقتين بيضاوين}\\ \text{بالضبط}\end{array}\right) = p\left(\begin{array}{c}\text{الحصول على}\\ \text{بيدقتين بيضاوين}\\ \text{و البيدقة الأخرى}\\ \text{سوداء}\end{array}\right) = \frac{card\left(\begin{array}{c}\text{بيدقتين}\\ \text{بيضاوين و}\\ \text{البيدقة الأخرى}\\ \text{سوداء}\end{array}\right)}{35}$$

$$= \frac{C_3^2 \times C_4^1}{35} = \frac{12}{35}$$

2

$$p\left(\begin{array}{c}\text{الحصول على}\\ \text{ثلاث بيدقات من}\\ \text{نفس اللون}\end{array}\right) = p\left(\begin{array}{c}\text{البيدقات الثلاث}\\ \text{كلها سوداء}\end{array} \text{ أو } \begin{array}{c}\text{البيدقات الثلاث}\\ \text{كلها بيضاء}\end{array}\right)$$

$$= p\left(\begin{array}{c}\text{البيدقات الثلاث}\\ \text{كلها سوداء}\end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c}\text{البيدقات الثلاث}\\ \text{كلها بيضاء}\end{array}\right)$$

$$= \frac{C_3^3}{35} + \frac{C_4^3}{35} = \frac{1}{35} + \frac{4}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

3

$$p\left(\begin{array}{c}\text{الحصول على}\\ \text{بيدقة بيضاء}\\ \text{على الأقل}\end{array}\right) = p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{بيدقات}\\ \text{بيضاء}\end{array} \text{ أو } \begin{array}{c}\text{بيدقتان}\\ \text{بيضاوين و}\\ \text{الثالثة سوداء}\end{array} \text{ أو } \begin{array}{c}\text{بيدقة بيضاء}\\ \text{و الأخريين}\\ \text{سوداوين}\end{array}\right)$$

$$= p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{بيدقات}\\ \text{بيضاء}\end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c}\text{بيدقتان}\\ \text{بيضاوين و}\\ \text{الثالثة سوداء}\end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c}\text{بيدقة بيضاء}\\ \text{و الأخريين}\\ \text{سوداوين}\end{array}\right)$$

$$= \frac{C_3^1 \times C_4^2}{35} + \frac{C_3^2 \times C_4^1}{35} + \frac{C_3^3}{35}$$

$$= \frac{1 \times 6}{35} + \frac{3 \times 4}{35} + \frac{1}{35} = \frac{19}{35}$$

التمرين الثالث :

1

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ بحيث $v_n \neq 0$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + n + 1 - 1}{u_n + n - 1} = \frac{\frac{1}{5}u_n - \frac{4}{5}u_n - \frac{1}{5} + n}{u_n + n - 1} = \frac{\frac{1}{5}v_n}{v_n} = \frac{1}{5}$$

لقد اختزلنا بالكمية الغير المنعدمة v_n لأن $v_n \neq 0$ حسب الإفتراض .

نحصل إذن على : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{5}$

يعني : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ v_{n+1} = \frac{1}{5} v_n$

إذن : $(v_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

2 أ

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$.

بما أن $(v_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ فإن حدها العام v_n يكتب على الشكل : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ v_n = v_0 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-0}$

و لدينا : $v_0 = u_0 + 0 - 1 = 2 + 0 - 1 = 1$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

أو بتعبير آخر : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ v_n = 5^{-n}$

2 ب

حصلنا على : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ v_n = 5^{-n}$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n + n - 1 = 5^{-n}$

يعني : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n = 5^{-n} - n + 1$

نلاحظ أن 5^{-n} متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ و هو عدد موجب أصغر من 1 .

إذن : $\lim_{n\infty} 5^{-n} = \lim_{n\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

و منه : $\lim_{n\infty} u_n = \lim_{n\infty}(5^{-n} - n + 1) = 0 - \infty + 1 = -\infty$

يعني أن المتتالية $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ متباعدة . $\lim_{n\infty} u_n = -\infty$

3

لدينا : $T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_1$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^0 + \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(5 - 5\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{5}{5^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right)$$

إذن : $T_n = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right)$

و لدينا كذلك : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

إذن : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\left(\frac{1}{5}\right)^k - k + 1\right)$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

$$= T_n - \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= T_n - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$= T_n - \left(\frac{n(n+1) - 2(n+1)}{2}\right)$$

$$= T_n - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

التمرين الرابع :

1

$$\left(\sqrt{2} + 2i\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{2}\right)(2i) + (2i)^2$$

$$= 2 + 4\sqrt{2}i - 4 = -2 + 4\sqrt{2}i$$

2

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - \left(\sqrt{2} + 2\right)z + 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 0$

لدينا : $\Delta = \left(\sqrt{2} + 2\right)^2 - 4\left(2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)$

$$= \left(6 + 4\sqrt{2}\right) - 4\left(2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)$$

$$= -2 + 4\sqrt{2}i = \left(\sqrt{2} + 2i\right)^2$$

YOUR WAY

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{(\sqrt{2}+2)-(\sqrt{2}+2i)}{2} = 1-i \\ z_1 = \dfrac{(\sqrt{2}+2)+(\sqrt{2}+2i)}{2} = 1+\sqrt{2}+i \end{cases}$$

3 أ

لدينا : $z_1 = 1-i$ إذن : $|z_1| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

و منه : $z_1 = \sqrt{2}e^{i\theta}$. لنحدد قياسا للزاوية θ .

لدينا : $\sqrt{2}e^{i\theta} = 1-i$

يعني : $\sqrt{2}\cos\theta + i\sqrt{2}\sin\theta = 1-i$

يعني : $\begin{cases} \sqrt{2}\cos\theta = 1 \\ \sqrt{2}\sin\theta = -1 \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\theta = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} \cos\theta = \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) \\ \sin\theta = \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \end{cases}$

إذن : $\theta \equiv \frac{-\pi}{4}[2\pi]$ و بالتالي : $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$

3 ب

في هذا السؤال ، أقترح طريقتين . إحداهما متهورة و الأخرى هادئة .

الطريقة المتهورة :

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (1-i)(1+\sqrt{2}+i) \\ &= 1+\sqrt{2}+i-i-\sqrt{2}i+1 \\ &= 2+\sqrt{2}-\sqrt{2}i \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{2}+1-i) \\ &= \sqrt{2}\left(\overline{\sqrt{2}+1+i}\right) \\ &= \sqrt{2}\,\overline{z_2} \end{aligned}$$

الطريقة الهادئة :

استعمال العلاقة بين حلي ثلاثية الحدود $az^2+bz+c=0$ و معاملاتها

لدينا بصفة عامة : $z_1z_2 = \frac{c}{a}$

إذن في معادلتنا هذه لدينا : $z_1z_2 = \frac{\sqrt{2}+1-i}{1} = \sqrt{2}\overline{z_2}$

في كلتا الطريقتين نلاحظ أن : $z_1z_2 = \sqrt{2}\,\overline{z_2}$

و منه : $\arg(z_1z_2) \equiv \arg(\sqrt{2}\overline{z_2})\ [2\pi]$

و منه : $\arg(z_1)+\arg(z_2) \equiv \arg(\overline{z_2})+\arg(\sqrt{2})\ [2\pi]$

و منه : $\arg(z_1)+\arg(z_2) \equiv -\arg(z_1)+0\ \ [2\pi]$

و منه : $\arg(z_1)+2\arg(z_2) \equiv 0\ \ [2\pi]$

3 ج

لدينا حسب ما سبق : $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$

إذن : $\arg(z_1) \equiv \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

و نعلم أن : $\arg(z_1)+2\arg(z_2) \equiv 0\ [2\pi]$

إذن : $\frac{-\pi}{4}+2\arg(z_2) \equiv 0\ [2\pi]$

يعني : $2\arg z_2 \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

أي : $\arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$

و بالتالي : $\frac{\pi}{8}$ عمدة العدد العقدي z_2 .

التمرين الخامس :

I 1

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا : $g(x) = x-\frac{1}{x}-2\ln x$

إذن : $g'(x) = 1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$ يعني : $g'(x) = \frac{x^2+1-2x}{x^2}$

يعني : $g'(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$

و نلاحظ أن : $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \geq 0\ ;\ (\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)$

إذن : $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \geq 0\ ;\ \forall\, x\,\epsilon\,]0,+\infty[$

يعني : $g'(x) \geq 0\ ;\ \forall\, x\,\epsilon\,]0;+\infty[$

و بالتالي : g دالة تزايدية على المجال $]0;+\infty[$.

I 2

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

إذن : $x\,\epsilon\,]0,1]$ أو $x\,\epsilon\, [1;+\infty[$

في الحالة الأولى : إذا كان $x\,\epsilon\,]0,1]$

لدينا $x \leq 1$ إذن : $g(x) \leq g(1) = 0$ لأن g تزايدية على $]0;+\infty[$

و منه : $g(x) \leq 0\ ;\ \forall\, x\,\epsilon\,]0;1]$

في الحالة الثانية : إذا كان $x\,\epsilon\, [1;+\infty[$

لدينا : $x \geq 1$ إذن : $g(x) \geq g(1) = 0$ لأن g تزايدية على $]0;+\infty[$

و منه : $g(x) \geq 0\ ;\ \forall\, x\,\epsilon\, [1;+\infty[$

II 1 أ

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2\left(\ln\sqrt{x}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=\sqrt{x}}} 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 \\ &= 4\times 0^2 = 0 \end{aligned}$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

نستغل إذن هذه النهاية لحساب نهاية f بجوار $+\infty$.

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{2}{x}\right) \\ &= (+\infty)(1+0-0-0) = +\infty \end{aligned}$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

YOUR WAY طريقكم
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

II 1 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا :

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+x-\left(\ln\frac{1}{x}\right)^2-2$$
$$=\frac{1}{x}+x-(-\ln x)^2-2$$
$$=\frac{1}{x}+x-(\ln x)^2-2=f(x)$$

إذن : $\forall x\in\,]0,+\infty[\ ;\ f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$

II 1 ج

لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{\substack{t\to+\infty\\ t=\frac{1}{x}}}f(t)=+\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$

و نفسر هذه النتيجة هندسيا بقولنا : إن المستقيم $(x=0)$ يعني محور الأراتيب ، مقارب عمودي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار الصفر .

II 1 د

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

لنحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}+x-(\ln x)^2-2}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{2}{x}\right)$$
$$=(1+0-0-0)=1$$

لنحسب إذن النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-1x)$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2\right)$$
$$=0-(+\infty)^2-2=-\infty$$

إذن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

أو بتعبير آخر : $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في تجاه المنصف الأول للمعلم .

II 2

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$

إذن : $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}-2(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)$

يعني : $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}$

يعني : $f'(x)=\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}-2\ln x\right)$

يعني : $f'(x)=\frac{1}{x}g(x)$

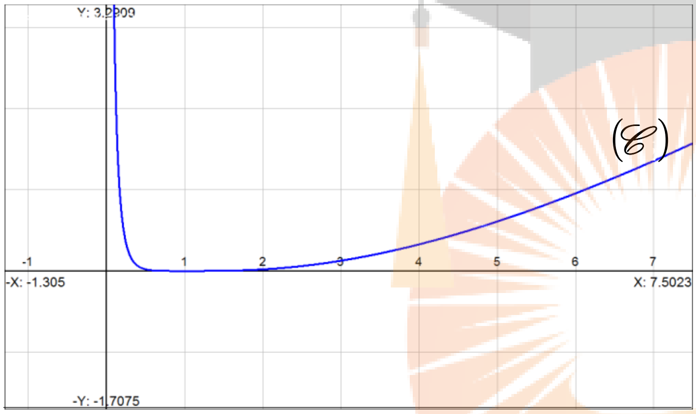
و بالتالي : $\forall x\in\,]0,+\infty[\ ;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

إذن من هذه المتساوية نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $g(x)$ و من ثَمَّ نستغل ما حصلنا عليه في السؤال I 2) لصياغة جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

II 3

التمثيل المبياني للدالة f .



II 4 أ

لدينا : $g(x)=\ln x$ و $G(x)=x\ln x-x$

إذن : $G'(x)=(x\ln x)'=\ln x+\frac{x}{x}-1$
$$=\ln x+1-1=\ln x=g(x)$$

و نعلم أن الدالة g معرفة و متصلة على المجال $]0;+\infty[$.

إذن : G دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

II 4 ب

$$\int_1^e(\ln x)^2\,dx=\int_1^e\underbrace{(\ln x)}_{u'}\underbrace{(\ln x)}_{v}dx$$
$$=[\ln x\cdot(x\ln x-x)]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}(x\ln x-x)\,dx$$
$$=[x(\ln x)^2-x\ln x]_1^e-\int_1^e(\ln x-1)\,dx$$
$$=[x(\ln x)^2-x\ln x]_1^e-[x\ln x-x-x]_1^e$$
$$=[x(\ln x)^2-x\ln x]_1^e-[x\ln x-2x]_1^e$$
$$=[x(\ln x)^2-x\ln x-x\ln x+2x]_1^e$$
$$=[x(\ln x)^2-2x\ln x+2x]_1^e$$
$$=(e(\ln e)^2-2e\ln e+2e)-((\ln 1)^2-2\ln 1+2)$$
$$=(e-2e+2e)-(0-0+2)=e-2$$

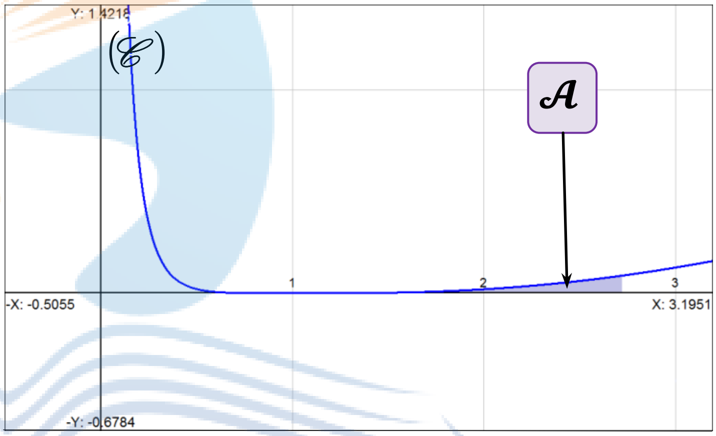
YOUR WAY
وارشاد شباب المستقبل

II 4 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x = 1$ و $x = e$.

لدينا حسب التأويل الهندسي للتكامل :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)|\,dx &= \int_1^e f(x)\,dx \\
&= \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2\right) dx \\
&= \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} - 2\right) dx - \int_1^e (\ln x)^2\,dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + \ln x - 2x\right]_1^e - (e-2) \\
&= \left(\frac{e^2}{2} + \ln e - 2e\right) - \left(\frac{1}{2} + \ln 1 - 2\right) - (e-2) \\
&= \frac{e^2}{2} + 1 - 2e - \frac{1}{2} + 2 - e + 2 \\
&= \frac{e^2}{2} - 3e + \frac{9}{2} \approx 0{,}04
\end{aligned}$$



YOUR WAY
طريقكم
جمعية لتوجيه
وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطتين $A(0,-1,1)$ و $B(1,-1,0)$ و الفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$

1,25 ن **1** بين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,0,2)$ و أن شعاعها يساوي $\sqrt{3}$. و تحقق من أن A تنتمي إلى (S) .

1,25 ن **2** حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ و بين أن : $x+y+z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) .

0,50 ن **3** بين أن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S) في النقطة A .

التمرين الثاني : (3,0 ن)

1,00 ن **1** حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+34=0$

2 نعتبر ، في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=3+5i$ و $b=3-5i$ و $c=7+3i$.

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $4-2i$.

0,75 ن **2** **أ** بين أن : $z'=z+4-2i$ ثم تحقق من أن النقطة C هي صورة النقطة A بالإزاحة T .

0,50 ن **2** **ب** بين أن : $\frac{b-c}{a-c}=2i$

0,75 ن **2** **ج** استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية و أن : $BC=2AC$.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

1 نسحب عشوائيا و في أن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

1,00 ن **1** **أ** أحسب احتمال الحصول على كرتين حمراوين و كرة خضراء .

1,00 ن **1** **ب** بين أن احتمال الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل هو : $\frac{16}{21}$

1,00 ن **1** **ج** نعتبر في هذا السؤال التجربة التالية:
" نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق "
أحسب احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء .

طريقكم YOUR WAY
جمعية توجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الرابع : (11 ن)

I			لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-2\ln x$	
I	1	أ	أحسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$.	0,50 ن
I	1	ب	بين أن g تناقصية على المجال $]0;2]$ و تزايدية على المجال $[2;+\infty[$.	0,50 ن
I	2		استنتج أن : $g(x)>0$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$ (لاحظ أن $g(2)>0$).	0,50 ن
II			نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-(\ln x)^2$ ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.	
II	1		أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ و أوِّل النتيجة هندسيا .	0,75 ن
II	2	أ	بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ (يمكن وضع : $t=\sqrt{x}$ و نذكر أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$).	0,50 ن
II	2	ب	استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.	0,75 ن
II	2	ج	أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ثم استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا و اتجاهه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.	0,50 ن
II	2	د	بين أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد تحت المستقيم (Δ) .	0,25 ن
II	3	أ	بين أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$; $\forall x\in]0;+\infty[$ و بين أن f تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$.	0,75 ن
II	3	ب	ضع جدول تغيرات الدالة f .	0,25 ن
II	3	ج	بين أن : $y=x$ هي معادلة ديكارتية لمماس المنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة ذات الأفصول 1 .	0,50 ن
II	4		بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $]0;+\infty[$. و أن : $\frac{1}{e}<\alpha<\frac{1}{2}$	0,50 ن
II	5		أرسم $(\mathscr{C})$ و (Δ) (نأخذ $e\approx2,7$ و نقبل أن $I(e\,;\,e-1)$ نقطة انعطاف لـ$(\mathscr{C})$)	1,00 ن
II	6	أ	بين أن : $H : x\to x\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $h : x\to\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ ثم بين أن : $\int_1^e \ln x\,dx=1$	0,50 ن
II	6	ب	باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن : $\int_1^e(\ln x)^2\,dx=e-2$	0,75 ن
II	6	ج	أحسب مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.	0,50 ن
III			نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases}u_{n+1}=f(u_n)\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})\\ u_0=2\end{cases}$	
III	1		بين أن : $1\le u_n\le2$; $(\forall n\in\mathbb{N})$ (استعمل نتيجة السؤال II 3 أ).	0,75 ن
III	2		بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية .	0,50 ن
III	3		استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثم حدد نهايتها .	0,75 ن

أجوبة امتحان الدورة العادية 2008

التمرين الأول :

1

لدينا : الفلكة $(\mathcal{S})$ معرفة بالمعادلة التالية :

$$(\mathcal{S}):\ x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$$

إذن : $(\mathcal{S}):\ (x^2-2x)+(y^2)+(z^2-4z)+2=0$

يعني : $(\mathcal{S}):\ (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$

إذن : $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1,0,2)$ و شعاعها $\sqrt{3}$.

2

لدينا : $\begin{cases} O(0,0,0) \\ A(0,-1,1) \\ B(1,-1,0) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{OA}(0,-1,1) \\ \overrightarrow{OB}(1,-1,0) \end{cases}$

و منه :

$$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=1\vec{i}-(-1)\vec{j}+1\vec{k}\ =\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

إذن : $(1,1,1)$ هو مثلوث احداثيات المتجهة $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OB}$.

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (OAB) .

بما أن المتجهة $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ منظمية على المستوى (OAB) .

فإن $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ متعامدتان . أي : $\overrightarrow{OM}\cdot\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)=0$.

يعني : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$ إذن : $x+y+z=0$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) .

2

لدينا : $(OAB):x+y+z=0$

و لدينا كذلك $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1,0,2)$ و شعاعها $\sqrt{3}$.

$$d(\Omega,(OAB))=\frac{|1+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

إذن : المستوى (OAB) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة واحدة .

لدينا : $\boxed{A\epsilon(OAB)}$ **(1)**

و لدينا أيضا : $(\mathcal{S}):\ x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$

نلاحظ أن : $0^2+(-1)^2+1^2-2(0)-4(1)+2=0$

إذن : $\boxed{A\epsilon(\mathcal{S})}$ **(2)**

من (1) و (2) نستنتج أن A هي نقطة تماس (OAB) و الفلكة $(\mathcal{S})$.

التمرين الثاني :

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2-6z+34=0$

لدينا : $\Delta=(-6)^2-4(34)=36-136=-100=(10i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 :

$$z_1=\frac{6-10i}{2}=3-5i \quad \text{و} \quad z_2=\frac{6+10i}{2}=3+5i$$

2 أ

لدينا : $aff(\vec{u})=4-2i$ و الإزاحة T معرفة بما يلي :

$$\begin{array}{llll} T_{\vec{u}}: & (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ & M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$$

لدينا : $T_{\vec{u}}(M)=M'$

إذن : حسب التعريف المتجهي للإزاحة نكتب : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

و منه : $aff\left(\overrightarrow{MM'}\right)=aff(\vec{u})$ يعني : $z'-z=4-2i$

أي : $z'=z+4-2i$

و بالتالي : الإزاحة T معرفة بما يلي :

$$\begin{array}{llll} T_{\vec{u}}: & (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ & M(z) & \longmapsto & M'(z+4-2i)\ \ (*) \end{array}$$

لدينا : $aff(A)+4-2i=(3+5i)+4-2i$

$$=7+3i=aff(C)$$

إذن نستنتج أن : $aff(C)=aff(A)+4-2i$

و منه حسب الكتابة العقدية $(*)$ نستنتج أن : $T_{\vec{u}}(A)=C$

2 ب

لدينا : $\begin{cases} aff(A)=a=3+5i \\ aff(B)=b=3-5i \\ aff(C)=c=7+3i \end{cases}$

إذن :

$$\frac{b-c}{a-c}=\frac{(3-5i)-(7+3i)}{(3+5i)-(7+3i)}=\frac{-4-8i}{-4+2i}$$

$$=\frac{-(4+8i)(2i+4)}{(2i-4)(2i+4)}=\frac{-(16-16+40i)}{(2i)^2-4^2}$$

$$=\frac{-40i}{-20}=2i$$

و بالتالي : $\dfrac{b-c}{a-c}=2i$

2 ج

لدينا حسب ما سبق : $\dfrac{b-c}{a-c}=2i$

إذن : $\begin{cases} \left|\dfrac{b-c}{a-c}\right|=|2i| \\ \arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)\equiv\arg(2i)\ [2\pi] \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \dfrac{|b-c|}{|a-c|}=2 \\ \arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

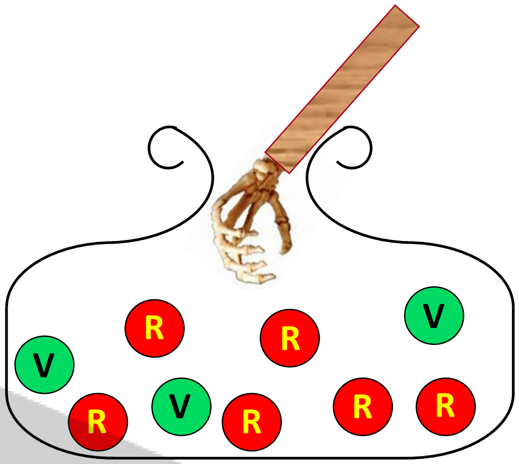
يعني : $\begin{cases} |b-c|=2|a-c| \\ \left(\overline{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} BC=2AC \\ A\hat{C}B=90^\circ \end{cases}$

و بالتالي : ABC قائم الزاوية في النقطة C و $BC=2\,AC$.

طريقك YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من كيس يحتوي على 9 كرات فإن هذه التجربة العشوائية تحتمل C_9^3 نتيجة ممكنة .
يعني : $card(\Omega) = C_9^3 = 84$ بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1 أ

$$p\begin{pmatrix}\text{كرتين}\\ \text{حمراوين و}\\ \text{كرة خضراء}\end{pmatrix} = \frac{card\begin{pmatrix}\text{كرتين}\\ \text{حمراوين و}\\ \text{كرة خضراء}\end{pmatrix}}{card(\Omega)} = \frac{C_6^2 \times C_3^1}{84}$$

$$= \frac{15 \times 3}{84} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$$

1 ب

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى :

$$p\begin{pmatrix}\text{كرة}\\ \text{خضراء}\\ \text{على الأقل}\end{pmatrix} = p\begin{pmatrix}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{خضراء}\end{pmatrix} \text{ أو } \begin{matrix}\text{كرتان}\\ \text{خضراوان و}\\ \text{كرة حمراء}\end{matrix} \text{ أو } \begin{matrix}\text{كرة خضراء}\\ \text{و كرتين}\\ \text{حمراوين}\end{matrix}$$

$$= p\begin{pmatrix}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{خضراء}\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}\text{كرتان}\\ \text{خضراوان و}\\ \text{كرة حمراء}\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}\text{كرة خضراء}\\ \text{و كرتين}\\ \text{حمراوين}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{card\begin{pmatrix}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{خضراء}\end{pmatrix}}{card(\Omega)} + \frac{card\begin{pmatrix}\text{كرتان}\\ \text{خضراوان و}\\ \text{كرة حمراء}\end{pmatrix}}{card(\Omega)} + \frac{card\begin{pmatrix}\text{كرة خضراء}\\ \text{و كرتين}\\ \text{حمراوين}\end{pmatrix}}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{C_3^1 \times C_6^2}{84} + \frac{C_3^2 \times C_3^1}{84} + \frac{C_3^3}{84}$$

$$= \frac{3 \times 15}{84} + \frac{3 \times 6}{84} + \frac{1}{84} = \frac{16}{21}$$

الطريقة الثانية : إستعمال تقنية الحدث المضاد .

لدينا : $\begin{pmatrix}\text{الحصول على}\\ \text{ثلاث كرات كلها}\\ \text{حمراء}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{الحصول على}\\ \text{كرة خضراء}\\ \text{واحدة على الأقل}\end{pmatrix}$ ————

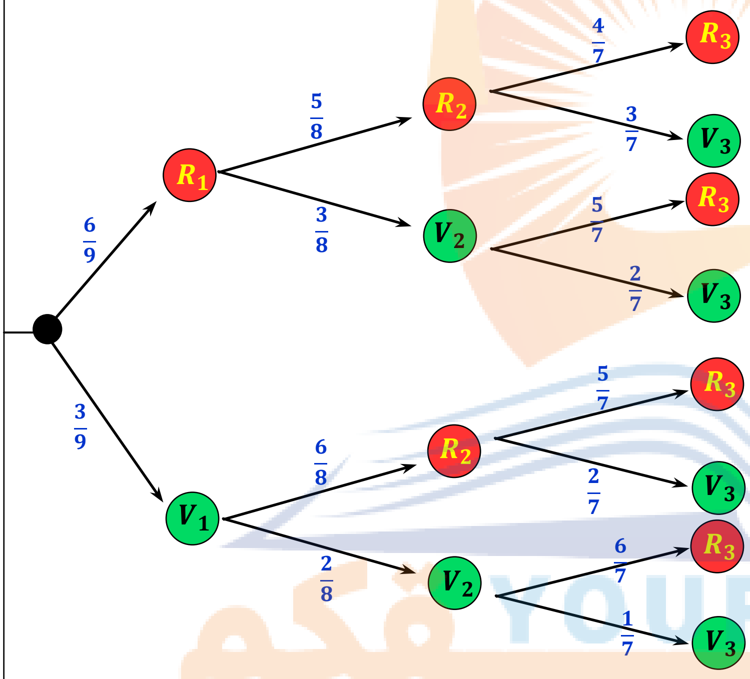
إذن : ———— $p\begin{pmatrix}\text{الحصول على}\\ \text{كرة خضراء}\\ \text{واحدة على الأقل}\end{pmatrix} = 1 - p\begin{pmatrix}\text{الحصول على}\\ \text{ثلاث كرات كلها}\\ \text{حمراء}\end{pmatrix}$

$$= 1 - \frac{card\begin{pmatrix}\text{الحصول على}\\ \text{ثلاث كرات كلها}\\ \text{حمراء}\end{pmatrix}}{card(\Omega)}$$

$$= 1 - \frac{C_6^3}{84} = 1 - \frac{20}{84} = \frac{64}{84} = \frac{16}{21}$$

1 ج

عندما نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق فإن هذه التجربة العشوائية تصبح ثلاث سحبات متتابعة و مبينة في الشجرة التالية :



من خلال هذه الشجرة المباركة يمكن حساب احتمال أي حدث كيفما كان .

$$p\begin{pmatrix}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{حمراء}\end{pmatrix} = p\begin{pmatrix}\text{كرة حمراء}\\ \text{في السحبة}\\ \text{الثالثة}\end{pmatrix} \text{ و } \begin{matrix}\text{كرة حمراء}\\ \text{في السحبة}\\ \text{الثانية}\end{matrix} \text{ و } \begin{matrix}\text{كرة حمراء}\\ \text{في السحبة}\\ \text{الأولى}\end{matrix}$$

$$= p(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = p(R_1) \times p(R_2) \times p(R_3)$$

$$= \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{120}{504} = \frac{5}{21}$$

إضافة : أضيف على سبيل الاستئناس الاحتمالات التالية :

$$p\begin{pmatrix}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{خضراء}\end{pmatrix} = \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{84}$$

$$p\left(\text{كرتين خضراوين على الأقل}\right) = \left(\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{6}{7}\right)+\left(\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{14}+\frac{1}{14}+\frac{1}{14}+\frac{1}{84} = \frac{19}{84}$$

و هذا يعني أننا نستطيع حساب احتمال أي حدث وارد في الشجرة بتتبع مساره فقط داخل الشجرة . انتهت الإضافة . و الزيادة من رأس **العاقل** ؟.

التمرين الرابع :

I 1 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا : $g(x) = x - 2\ln x$.

إذن : $g'(x) = (x - 2\ln x)' = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$

إذن : $(\forall x > 0)\ ;\ g'(x) = \dfrac{x-2}{x}$

I 1 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;2]$. يعني : $0 < x \le 2$

يعني : $-2 < x - 2 \le 0$ و منه : $\dfrac{x-2}{x} \le 0\ ;\ \forall\, x\, \epsilon\,]0,2]$

يعني : $\forall\, x\, \epsilon\,]0;2]\ ;\ g'(x) \le 0$

و هذا يعني أن الدالة g تناقصية على المجال $]0;2]$.

ليكن x عنصرا من المجال $[2;+\infty[$.

إذن : $x \ge 2$ و منه : $x - 2 \ge 0$

يعني : $(\forall x \ge 2)\ ;\ \dfrac{x-2}{x} \ge 0$

يعني : $(\forall x \ge 2)\ ;\ g'(x) \ge 0$

يعني أن الدالة g تزايدية على المجال $[2;+\infty[$.

I 2

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

هذا يعني أن : $x\,\epsilon\,]0;2]$ أو $x\,\epsilon\,[2;+\infty[$.

الحالة الأولى : $x\,\epsilon\,]0;2]$

لدينا : $x \le 2$

و بما أن g تناقصية على $]0;2]$ فإن : $g(x) \ge g(2)$.

و لدينا : $g(2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0{,}6 > 0$

إذن : $\forall\, x\,\epsilon\,]0;2]\ ;\ g(x) \ge g(2) > 0$

يعني : $\boxed{\forall\, x\,\epsilon\,]0;2]\ ;\ g(x) > 0}$ $\mathbf{(1)}$

الحالة الثانية : $x\,\epsilon\,[2;+\infty[$

لدينا : $x \ge 2$.

بما أن : g تزايدية على $[2;+\infty[$ فإن : $g(x) \ge g(2)$

و لدينا : $g(2) \approx 0{,}6 > 0$

إذن : $\forall\, x\,\epsilon\,[2;+\infty[\ ;\ g(x) \ge g(2) > 0$

يعني : $\boxed{\forall\, x\,\epsilon\,[2;+\infty[\ ;\ g(x) > 0}$ $\mathbf{(2)}$

نلاحظ أنه في كلتا الحالتين لدينا : $g(x) > 0$.

إذن : من $\mathbf{(1)}$ و $\mathbf{(2)}$ نستنتج أن : $\forall\, x\,\epsilon\,]0;+\infty[\ ;\ g(x) > 0$.

II 1

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x - (\ln x)^2)$

$$= 0 - (\ln 0^+)^2 = 0 - (-\infty)^2 = 0 - (+\infty) = -\infty$$

إذن : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

إذن محور الأراتيب مقارب عمودي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار الصفر على اليمين .

II 2 أ

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = 4\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$= 4\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=\sqrt{x}}}\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 4\times 0^2 = 0$$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$

II 2 ب

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - (\ln x)^2)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \underbrace{\frac{(\ln x)^2}{x}}\right) = (+\infty)(1-0) = +\infty$$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و لدينا كذلك : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-(\ln x)^2}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \underbrace{\frac{(\ln x)^2}{x}}\right) = (1-0) = 1$$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

II 2 ج

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - (\ln x)^2 - x)$

$$= \lim_{x\to+\infty} -(\ln x)^2 = -(+\infty)^2 = -\infty$$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = -\infty$

حصلنا لحد الآن على النهايات التالية :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x) = -\infty \end{cases}$$

و هذه النهايات تُمكننا من أن نقول أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ بجوار $+\infty$.

طريقكم توجيه وإرشاد شباب المستقبل YOUR WAY

II 2 د

لدينا : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ f(x) - x = -(\ln x)^2$

نعلم أن مربع أي عدد حقيقي يكون دائما موجبا .

يعني : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ (\ln x)^2 \geq 0$

يعني : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ -(\ln x)^2 \leq 0$

يعني : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ f(x) - x \leq 0$

يعني : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ f(x) \leq x$

إذن $(\mathscr{C})$ يوجد فوق المستقيم (Δ) على المجال $]0;+\infty[$.

II 3 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x) = x - (\ln x)^2$.

إذن : $f'(x) = 1 - 2(\ln x)(\ln x)'$

$$= 1 - \frac{2\ln x}{x} = \frac{x - 2\ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

إذن : $\forall x \in]0,+\infty[\ ; \ f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

لدينا : حسب السؤال I (2 : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ g(x) > 0$

إذن : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ \frac{g(x)}{x} > 0$

و منه : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ f'(x) > 0$

و هذا يعني أن f دالة تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

II 3 ب

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

II 3 ج

نعلم أن المعادلة الديكارتية للمماس (T) للمنحنى في النقطة التي أفصولها x_0 تكتب بصفة عامة على الشكل التالي :

$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

إذن : $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

و لدينا : $f(1) = 1 - (\ln 1)^2 = 1$

و كذلك : $f'(1) = \frac{g(1)}{1} = \frac{1 - 2\ln 1}{1} = 1$

إذن : $(T) : y = 1(x-1) + 1$

يعني : $(T) : y = x$

II 4

من خلال جدول تغيرات الدالة f ، نلاحظ أن f دالة تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$ و معرفة بما يلي : $f \ : \ ]0,+\infty[\ \longmapsto \ \mathbb{R}$

إذن f تقابل من المجال $]0;+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$.

و بما أن 0 عنصر من $\mathbb{R}$ فإنه يمتلك سابقا واحدا α من المجال $]0;+\infty[$.

يعني : $\exists! \ \alpha \in]0;+\infty[\ ; \ f(\alpha) = 0$

يعني أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.

لدينا :
$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 \approx -0,6 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\ln\frac{1}{2}\right)^2 \approx 0,02 \end{cases}$$

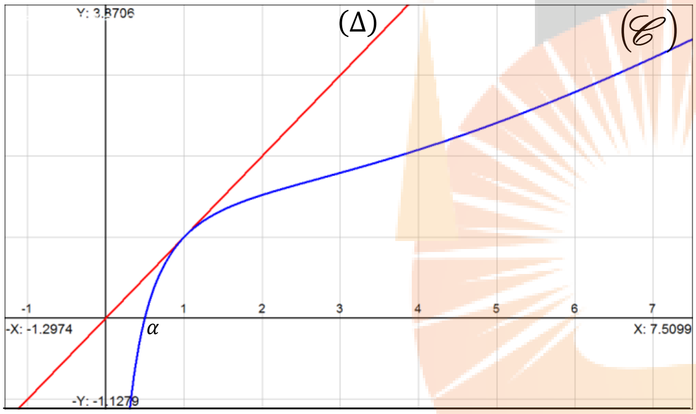
نلاحظ أن : $-0,6 < 0 < 0,02$ يعني : $f\left(\frac{1}{e}\right) < 0 < f\left(\frac{1}{2}\right)$

بإدخال الدالة العكسية f^{-1} نحصل على :

$$f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{e}\right)\right) < f^{-1}(0) < f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

يعني : $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$

II 5



II 6 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا : $H(x) = x\ln x - x$

إذن : $H'(x) = (x\ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x = h(x)$

إذن الدالة H دالة أصلية للدالة h على المجال $]0;+\infty[$.

و لدينا : $\int_1^e \ln x \, dx = \int_1^e h(x) \, dx = [H(x)]_1^e$

$$= H(e) - H(1) = (e\ln e - e) - (1\ln 1 - 1) = 1$$

II 6 ب

$$\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = \int_1^e \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{(\ln x)^2}_{v} \, dx = [uv]_1^e - \int uv' \, dx$$

$$= [x(\ln x)^2]_1^e - 2\int_1^e \frac{x\ln x}{x} dx$$

$$= e - 2\int_1^e \ln x \, dx = e - 2$$

III 6 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) و المستقيمين $x = 1$ و $x = e$.

بما أن التكامل يقيس عادة مسافة أو مساحة أو حجم .

طريقك YOUR WAY توجيه وإرشاد شباب المستقبل

فإن : $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)-x|\,dx$ ——— $(*)$

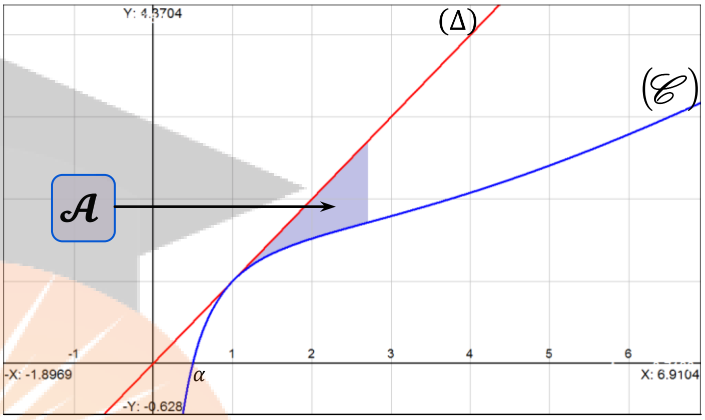
لدينا حسب السؤال (II (2 د) : $\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\;;\; f(x)-x \le 0}$

إذن : $\forall x \in [1;e] \;;\; f(x)-x \le 0$

و منه : $\forall x \in [1;e] \;;\; |f(x)-x| = x - f(x)$

و بالتالي : $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)-x|\,dx = \int_1^e (x-f(x))\,dx$

$$= \int_1^e (x - x + (\ln x)^2)\,dx = \int_1^e (\ln x)^2\,dx = e-2$$



و كإضافة على هذا الجواب ، يُطلَب منا في بعض الأحيان حساب هذه المساحة بالسنتمتر مربع (cm^2) . و من أجل ذلك نبحث عن وحدة المعلم .

نفترض أن : $l'unité = \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3\ cm$

إذن : $\mathcal{A} = (e-2)(l'unité)^2$ ———

$= (e-2)(3\ cm)^2 = 9(e-2)\ cm^2$

و في حالة ما لم يُطلب منك ذلك فلا داعي لهذا كله .

أو كما يقول المثل الياباني : الزيادة من رأس الأحمق .

1 III

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; 1 \le u_n \le 2$

لدينا : $2 \le 2 \le 1$ يعني : $1 \le u_0 \le 2$

إذن العبارة (P_0) صحيحة

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; 1 \le u_n \le 2$

نعلم حسب السؤال (II (3 أ) أن الدالة f تزايدية على المجال $]0;+\infty[$.

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; f(1) \le f(u_n) \le f(2)$

و لدينا : $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 - (\ln 2)^2 \approx 1{,}5 \end{cases}$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; 1 \le f(u_n) \le 1{,}5 < 2$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; 1 \le f(u_n) \le 2$

و منه : $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; 1 \le u_{n+1} \le 2$

إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; 1 \le u_n \le 2$

2 III

لدينا حسب السؤال (II (2 د) : $\forall x \in]0;+\infty[\;;\; f(x)-x \le 0$

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; 1 \le u_n \le 2$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; u_n \in [1;2] \subset]0;+\infty[$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; u_n \in]0;+\infty[$

إذن : نستطيع تطبيق النتيجة $(*)$ من أجل $x = u_n$.

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; f(u_n) - u_n \le 0$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; f(u_n) \le u_n$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; u_{n+1} \le u_n$

و منه : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

3 III

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; 1 \le u_n \le 2$

إذن : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية مصغورة بالعدد 1 .

و بما أنها تناقصية فهي متقاربة .

أو بتعبير آخر : $\begin{cases} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ مصغورة} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تناقصية} \end{cases} \Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متقاربة}$

و نهايتها ℓ تحقق : $f(\ell) = \ell$

يعني : $\ell - (\ln \ell)^2 = \ell$ يعني : $-(\ln \ell)^2 = 0$

يعني : $\ln \ell = 0$ أي : $\ell = 1$

طريقكم YOUR WAY لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

الإمتحـــــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريـــــــا
الدورة الاستدراكية **2008**

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الامتحانات

مــادة الريـــــــاضيات
العلوم التجـــــريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجـــية بمسلكيها
مدة الانجـاز **3h** ـ المعامل **7**

التمرين الأول : (3,0 ن)

1 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 8z + 17 = 0$ 1,00 ن

2 نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(\mathcal{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$
النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما : $a = 4 + i$ و $b = 8 + 3i$.
ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق M' صورة M بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة Ω
التي لحقها هو $1 + 2i$ و زاويته $\frac{3\pi}{2}$.

2 أ بين أن : $z' = -iz - 1 + 3i$ 0,75 ن

2 ب تحقق من أن لحق النقطة C صورة النقطة A بالدوران $\mathcal{R}$ هو $c = -i$ 0,50 ن

2 ج بين أن : $(b - c) = 2(a - c)$ ثم استنتج أن النقط A و B و C مستقيمية . 0,75 ن

التمرين الثاني : (3,0 ن)

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
المستوى $(\mathcal{P})$ الذي معادلته هي : $x + 2y + z - 1 = 0$
و الفلكة $(\mathcal{S})$ التي معادلتها هي : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z + 5 = 0$

1 بين أن مركز الفلكة $(\mathcal{S})$ هي النقطة $I(2,3,-1)$ و أن شعاعها يساوي 3 . 0,75 ن

2 أ بين أن مسافة النقطة I عن المستوى $(\mathcal{P})$ هي $\sqrt{6}$. 0,50 ن

2 ب استنتج أن المستوى $(\mathcal{P})$ يقطع الفلكة $(\mathcal{S})$ وفق دائرة (Γ) شعاعها يساوي $\sqrt{3}$. 0,75 ن

3 أ حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من I و العمودي على $(\mathcal{P})$. 0,50 ن

3 ب بين أن مركز الدائرة (Γ) هي النقطة $H(1,1,-2)$. 0,50 ن

التمرين الثالث : (3,0 ن)

يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء و ثلاث كرات حمراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس) .
نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق .

1 ما هو احتمال الحصول على ثلاث كرات بيضاء ؟ 1,00 ن

2 بين أن احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون هو $\frac{1}{7}$. 1,00 ن

3 ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل ؟ 1,00 ن

YOUR WAY
طريقكم
جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الرابع : (3,0 ن)

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{2u_n+3} \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \\ u_0 = 2 \end{cases}$

1	بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; u_n > 1$	1,00 ن
2	نضع : $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; v_n = \frac{u_n-1}{u_n}$	
2 أ	بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ ثم أكتب v_n بدلالة n .	1,00 ن
2 ب	بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; u_n = \frac{2}{2-\left(\frac{3}{5}\right)^n}$ ثم أحسب النهاية $\lim\limits_{n\infty} u_n$.	1,00 ن

التمرين الخامس : (8,0ن)

I	نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = e^{2x} - 2x$	
I 1	أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم بين أن g تزايدية على $[0;+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty;0]$.	1,00 ن
I 2	استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ (لاحظ أن : $g(0) = 1$).	0,75 ن
II	نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \ln(e^{2x} - 2x)$ و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.	
II 1 أ	بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	0,50 ن
II 1 ب	تحقق من أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^*) \; ; \; \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2\right)\frac{\ln(e^{2x}-2x)}{e^{2x}-2x}$	0,25 ن
II 1 ج	بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (نذكر أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$) .	0,50 ن
II 1 د	استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه .	0,25 ن
II 2 أ	لكل x من $[0;+\infty[$ تحقق من أن : $1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0$ و أن : $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)$	0,75 ن
II 2 ب	استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (نذكر أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$) .	0,50 ن
II 2 ج	بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل لـ $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.	0,50 ن
II 2 د	بين أن : $\forall x \in [0;+\infty[\; ; \; f(x) - 2x \le 0$ و استنتج أن $(\mathscr{C})$ يوجد أسفل (D) على $[0;+\infty[$	0,75 ن
II 3 أ	بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}) \; ; \; f'(x) = \frac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$	0,75 ن
II 3 ب	أدرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .	0,50 ن
II 4	أنشئ (D) و $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن $(\mathscr{C})$ له نقطتي انعطاف)	1,00 ن

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2008

التمرين الأول :

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية : $(E):\ z^2-8z+17=0$

لدينا : $\Delta=(-8)^2-4\times 17=-4=(2i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 :

$$z_1=\frac{8-2i}{2}=4-i \quad \text{و} \quad z_2=\frac{8+2i}{2}=4+i$$

2 أ

لدينا حسب المعطيات :
$$\begin{cases} aff(A)=a=4+i \\ aff(B)=b=8+3i \\ aff(M)=z \\ aff(M')=z' \\ aff(\Omega)=\omega=1+2i \end{cases}$$

و لدينا كذلك الدوران $\mathcal{R}$ معرف بما يلي :

$$\mathcal{R}\left(\Omega,\frac{3\pi}{2}\right):\ \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$$

و ننطلق من المعلومة التالية : $\mathcal{R}(M)=M'$

و منه حسب التعريق العقدي للدوران $\mathcal{R}$ نحصل على :

$$(z'-\omega)=e^{\frac{i3\pi}{2}}(z-\omega)$$

يعني : $z'-(1+2i)=\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)(z-(1+2i))$

يعني : $z'-1-2i=(0-1i)(z-1-2i)$

يعني : $z'-1-2i=-iz+i-2$

يعني : $z'=-iz+3i-1$

2 ب

ليكن العدد العقدي c لحق النقطة C .

لدينا حسب المعطيات : $\mathcal{R}(A)=C$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران $\mathcal{R}$ نحصل على :

$$(c-\omega)=e^{\frac{i3\pi}{2}}(a-\omega)$$

و هذا يعني أن : $c-1-2i=-i(4+i-1-2i)$

أي : $c-1-2i=-i(3-i)$

إذن : $c=-3i-1+1+2i$ يعني : $c=-i$

2 ج

لدينا : $(b-c)=(8+3i)-(-i)=8+4i=2(4+2i)$

إذن : $\boxed{(b-c)=2(a-c)}\ (*)$

نستغل إذن هذه المتساوية $(*)$ لكي نبرهن على أن النقط A و B و C نقط مستقيمية .

لدينا حسب النتيجة $(*)$: $(b-c)=2(a-c)$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد العقدي الغير المنعدم $\frac{1}{a-c}$

نحصل على :
$$\left(\frac{b-c}{a-c}\right)=2\in\mathbb{R}$$

إذن : $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\equiv 0\ [2\pi]$ يعني : $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv 0[2\pi]$

أي أن النقط A و B و C نقط مستقيمية .

و يمكنك الإجابة على هذا السؤال بطريقة أخرى و هي كالتالي :

نترجم الكتابة العقدية التالية $(b-c)=2(a-c)$

و ذلك باستعمال الكتابة المتجهية نجد : $\overrightarrow{CB}=2\,\overrightarrow{CA}$

إذن النقط A و B و C نقط مستقيمية .

التمرين الثاني :

1

لدينا $(\mathcal{S})$ فلكة معرفة بمعادلتها الديكارتية التالية :

$(\mathcal{S}):\ x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+5=0$

إذن : $(\mathcal{S}):\ (x^2-4x)+(y^2-6y)+(z^2+2z)+5=0$

يعني : $(\mathcal{S}):\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2+5=14$

يعني : $(\mathcal{S}):\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=3^2$

و بالتالي $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $I(2;3;-1)$ و شعاعها $R=3$.

2 أ

حصلنا لحد الآن على الأشياء التالية :
$$\begin{cases} (\mathcal{S})\ \text{مركزها}\ I(2;3;-1) \\ (\mathcal{P}):x+2y+z-1=0 \end{cases}$$

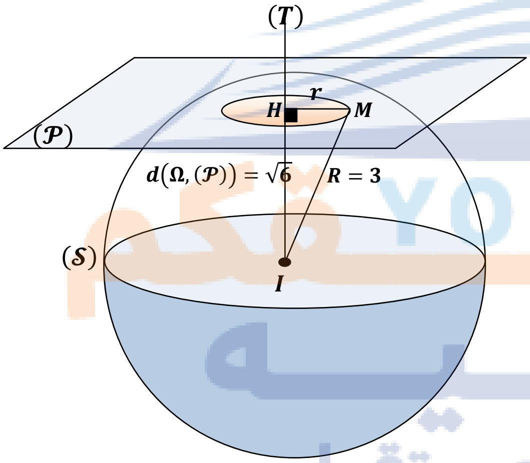
إذن :
$$d(I;(\mathcal{P}))=\frac{|2+2\times 3-1-1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

2 ب

لدينا $R=3$ هو شعاع الفلكة $(\mathcal{S})$.

و بما أن : $d(I,(\mathcal{P}))=\sqrt{6}<3$ فإن المستوى $(\mathcal{P})$ يقطع الفلكة $(\mathcal{S})$ وفق دائرة (Γ) مركزها H و شعاعها r .

لحساب الشعاع r نستعين بالشكل التالي :



نعلم أن $d(I,(\mathcal{P}))$ تُعبر عن أصغر مسافة تفصل بين النقطة I عن جميع نقط المستوى $(\mathcal{P})$

و نحصل على هذه المسافة عندما يكون $(HI)\perp(\mathcal{P})$.

إذن المثلث HMI قائم الزاوية في النقطة H .

و منه : حسب مبرهنة فيتاغورس : $IM^2=HI^2+HM^2$

يعني : $3^2=\sqrt{6}^2+r^2$ أي : $r^2=9-6=3$.

و بالتالي نستنتج أن المستوى $(\mathcal{P})$ يقطع الفلكة $(\mathcal{S})$ وفق دائرة (Γ) شعاعها $r=\sqrt{3}$.

YOUR WAY

3 أ

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (D) .

بما أن (D) مستقيم مار من النقطة $I(2;3;-1)$.

فإن المتجهة $\overrightarrow{IM}$ متجهة موجهة للمستقيم (D).

و لدينا المستوى $(\mathcal{P})$ مُعَرَّفٌ بمعادلته الديكارتية التالية :

$$(\mathcal{P}) : x + 2y = z - 1 = \quad 0$$

إذن المتجهة $\vec{n}(1,2,1)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$.

و بما أن المستقيم (D) عمودي على المستوى $(\mathcal{P})$.

فإن المتجهتان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{IM}$ مستقيميتان .

يعني : $\overrightarrow{IM} = t\,\vec{n} \quad : \quad (\exists t \epsilon \mathbb{R})$

يعني : $(D) : \begin{cases} x - 2 = t \\ y - 3 = 2t \quad ; \quad (t \epsilon \mathbb{R}) \\ z + 1 = t \end{cases}$

يعني : $(D) : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 3 \quad ; \quad (t \epsilon \mathbb{R}) \\ z = t - 1 \end{cases}$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (D) .

3 ب

بالرجوع إلى الشكل السابق .

و من خلال مفهوم $d\big(I,(\mathcal{P})\big)$ نستنتج أن $\boxed{(HM) \perp (HI)}$ $\mathbf{(1)}$

و نعلم أن $(\mathcal{P}) \perp (D)$ إذن : $\boxed{(HM) \perp (D)}$ $\mathbf{(2)}$

من النتيجتين (**1**) و (**2**) نستنتج أن : $(D) \parallel (HI)$

و بما أن : $I \epsilon (D)$ فإن (D) و (HI) منطبقان .

يعني أن : $H \epsilon (D)$.

نضع : $H(\alpha,\beta,\gamma)$

لدينا حسب التمثيل البارامتري للمستقيم (D) : $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 3 \quad ; \quad (t \epsilon \mathbb{R}) \\ z = t - 1 \end{cases}$

نعوض x و y و z على التوالي بِـ α و β و γ لأن $H \epsilon (D)$ نجد :

$$\mathbf{(3)} \quad \boxed{\begin{cases} \alpha = t + 2 \\ \beta = 2t + 3 \\ \gamma = t - 1 \end{cases}}$$

من جهة أخرى لدينا : $H \epsilon (\mathcal{P})$ بحيث : $(\mathcal{P}) : x + 2y + z - 1 = 0$

إذن : $\boxed{\alpha + 2\beta + \gamma - 1 = 0}$ $\mathbf{(4)}$

نعوض α و β و γ بِقِيَمِهما حسب (3) في النتيجة (4) فنحصل على :

$$(t + 2) + 2(2t + 3) + (t - 1) - 1 = 0$$

نحل هذه المعادلة الظريفة من الدرجة الأولى بمجهول واحد t نجد :

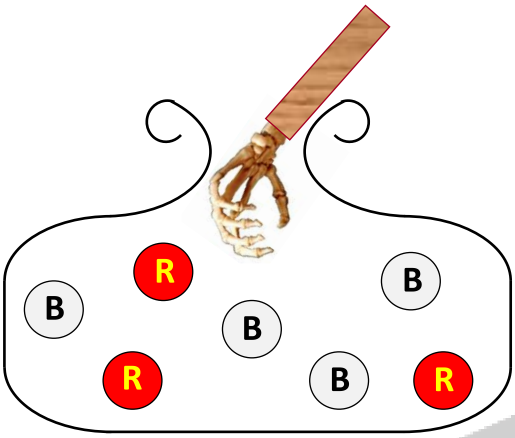
$$6t + 6 = 0 \quad \text{أي} \quad t = -1$$

و بالعودة إلى العلاقة (3) نعوض t بقيمته (-1) نحصل على :

$$\begin{cases} \alpha = -1 + 2 = 1 \\ \beta = 2(-1) + 3 = 1 \\ \gamma = -1 - 1 = -2 \end{cases}$$

و بالتالي : النقطة $H(1,1,-2)$ هي مركز الدائرة (Γ) .

التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا ثلاث كرات في آن واحد من صندوق يحتوي على 7 كرات فإنه توجد C_7^3 نتيجة ممكنة لهذه التجربة العشوائية .

يعني : $card(\Omega) = C_7^3 = 35$ بحيث : Ω هو كون الإمكانيات .

1

$$p\begin{pmatrix}\text{ثلاث كرات}\\\text{بيضاء}\end{pmatrix} = \frac{card\begin{pmatrix}\text{ثلاث كرات}\\\text{بيضاء}\end{pmatrix}}{card(\Omega)} = \frac{C_4^3}{card(\Omega)} = \frac{4}{35}$$

2

$$p\begin{pmatrix}\text{الحصول على}\\\text{ثلاث كرات من}\\\text{نفس اللون}\end{pmatrix} = p\begin{pmatrix}\text{الحصول على} & & \text{الحصول على}\\\text{ثلاث كرات} & \text{أو} & \text{ثلاث كرات}\\\text{بيضاء} & & \text{حمراء}\end{pmatrix}$$

$$= p\begin{pmatrix}\text{الحصول على}\\\text{ثلاث كرات}\\\text{بيضاء}\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}\text{الحصول على}\\\text{ثلاث كرات}\\\text{حمراء}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{card\begin{pmatrix}\text{الحصول على}\\\text{ثلاث كرات}\\\text{بيضاء}\end{pmatrix}}{card(\Omega)} + \frac{card\begin{pmatrix}\text{الحصول على}\\\text{ثلاث كرات}\\\text{حمراء}\end{pmatrix}}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{C_3^3}{35} + \frac{C_4^3}{35} = \frac{1}{35} + \frac{4}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

3

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى :

$$p\begin{pmatrix}\text{الحصول على}\\\text{كرة بيضاء على}\\\text{الأقل}\end{pmatrix} = p\begin{pmatrix}\text{ثلاث} & & \text{كرتين بيضاوين} & & \text{كرة بيضاء}\\\text{كرات} & \text{أو} & \text{و كرة حمراء} & \text{أو} & \text{و كرتان}\\\text{بيضاء} & & \text{واحدة} & & \text{حمراوين}\end{pmatrix}$$

$$= p\begin{pmatrix}\text{ثلاث}\\\text{كرات}\\\text{بيضاء}\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}\text{كرتين بيضاوين}\\\text{و كرة حمراء}\\\text{واحدة}\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}\text{كرة بيضاء}\\\text{و كرتان}\\\text{حمراوين}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{C_4^1 \times C_3^2}{35} + \frac{C_4^2 \times C_3^1}{35} + \frac{C_4^3}{35}$$

$$= \frac{4 \times 3}{35} + \frac{6 \times 3}{35} + \frac{4}{35} = \frac{34}{35}$$

الطريقة الثانية : (استعمال تقنية الحدث المضاد $p(A) = 1 - p(\bar{A})$)

لدينا : (الحصول على ثلاث كرات كلها حمراء) = $\overline{(\text{الحصول على كرة بيضاء على الأقل})}$

لدينا : p(الحصول على كرة بيضاء على الأقل) $= 1 - p$ $\overline{(\text{الحصول على كرة بيضاء على الأقل})}$

$= 1 - p$(الحصول على ثلاث كرات كلها حمراء)

$$= 1 - \frac{C_3^3}{35} = 1 - \frac{1}{35} = \frac{34}{35}$$

التمرين الرابع :

1

نضع : $P(n) : \ (\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ u_n > 1$

لنبرهن بالترجع على أن العبارة $P(n)$ صحيحة .

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 2 > 1$

إذن العبارة $P(0)$ صحيحة .

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$.

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ u_n > 1$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ 3u_n > 3$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ 5u_n - 2u_n > 3$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ 5u_n > 2u_n + 3$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الموجب $\left(\frac{1}{2u_n + 3}\right)$ نحصل على :

$$(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ \frac{5u_n}{2u_n + 3} > 1$$

و نلاحظ أن الترتيب لم يتغير لأن $u_n > 1$ حسب الافتراض السابق .

يعني : $\frac{5u_n}{2u_n + 3}$ كمية موجبة قطعا .

حصلنا إذن على : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} > 1$

و هذا يعني أن العبارة $P(n+1)$ صحيحة .

و خلاصة ما وجدناه نلخصه في النظمة التالية :

$$\begin{cases} P(0) \ est \ vraie \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \ ; \ (\forall n\epsilon\mathbb{N}) \end{cases}$$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ u_n > 1$

2 أ

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$. لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{5u_n}{2u_n + 3} - 1}{\frac{5u_n}{2u_n + 3}} = \frac{3u_n - 3}{5u_n}$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = \frac{3}{5}v_n$$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ v_{n+1} = \frac{3}{5}v_n$

أي : $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها الكسر $\frac{3}{5}$.

إذن الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ يكتب على الشكل :

$$v_n = v_0\left(\frac{3}{5}\right)^{n-0} = \left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{2-1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

و بالتالي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ v_n = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n$

2 ب

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$.

لدينا : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ إذن : $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

يعني : $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n u_n = u_n - 1$ يعني : $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n u_n - 1\right) = u_n$

يعني : $u_n = \dfrac{-1}{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1}$

نضرب البسط و المقام في العدد -2 نحصل على :

$$(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ u_n = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

و بما أن : $\left(\frac{3}{5}\right)^n$ عبارة عن متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الموجب و الأصغر من واحد $\frac{3}{5}$. فإن : $\lim_{n\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$

و بالتالي : $\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(\frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}\right) = \frac{2}{2-1} = 1$

يعني : $\lim_{n\infty}(u_n) = 1$

التمرين الخامس :

I 1

ليكن x عددا حقيقيا . لدينا : $g(x) = e^{2x} - 2x$

إذن : $g'(x) = 2e^{2x} - 2 = 2(e^x - 1)$

نلاحظ أن إشارة $g'(x)$ تتعلق فقط بإشارة التعبير $(e^{2x} - 1)$.

- إذا كان $x = 0$ فإن $g'(x) =$
- إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) >$
- إذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) <$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول الجميل أن الدالة g تزايدية على المجال $[0;+\infty[$ و تناقصية على المجال $]-\infty;0]$.

YOUR WAY
جمعية توجيه وإرشاد شباب المستقبل

I 2

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. هذا يعني أن $x \geq 0$ أو $x \leq 0$.

في **الحالة الأولى** : إذا كان $x \geq 0$.

فإن : $g(x) \geq g(0)$ لأن g دالة تزايدية على $\mathbb{R}^+$.

و لدينا : $g(0) = e^{2\times 0} - 2\times 0 = 1$

إذن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ g(x) \geq 1 > 0$

أي : $\boxed{(\forall x \geq 0)\ ;\ g(x) > 0}$ $(\mathbf{1})$

في **الحالة الثانية** : إذا كان $x \leq 0$.

فإن : $g(x) \geq g(0)$ لأن g دالة تناقصية على $\mathbb{R}^-$.

يعني : $(\forall x \leq 0)\ ;\ g(x) \geq 1 > 0$

يعني : $\boxed{(\forall x \leq 0)\ ;\ g(x) > 0}$ $(\mathbf{2})$

إذن : من النتيجتين (1) و (2) نحصل على : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ g(x) > 0$

II 1 أ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\Big(\underbrace{e^{2x}}_{0^+} - \underbrace{2x}_{-\infty}\Big)$$
$$= \ln\big(0-(-\infty)\big) = \ln(+\infty) = +\infty$$

II 1 ب

ليكن x عددا حقيقيا غير منعدم .

لدينا :
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(e^{2x}-2x)}{x} = \frac{\ln(e^{x}-2x)}{(e^{x}-2x)} \times \frac{(e^{x}-2x)}{x}$$
$$= \left[\frac{\ln(e^{2x}-2x)}{(e^{2x}-2x)}\right] \times \left[\frac{e^{2x}}{x} - 2\right]$$

II 1 ج

لدينا :
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(e^{2x}-2x)}{(e^{2x}-2x)}\right)\left(\frac{e^{2x}}{x}-2\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(e^{2x}-2x)}{(e^{2x}-2x)}\right) \times \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{2x}}{x}-2\right)$$
$$= \lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=e^{2x}-2x}} \underbrace{\left(\frac{\ln t}{t}\right)}_{+\infty \,\searrow\, \mathbf{0}^+} \times \lim_{\substack{m\to-\infty\\ m=2x}} \left(2\underbrace{\left(\frac{e^{m}}{m}\right)}_{-\infty \,\searrow\, \mathbf{0}^-} - 2\right)$$
$$= 0^+ \times (0^- - 2) = 0^+ \times (-2) = 0^- = 0$$

إذن : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$

II 1 د

حصلنا حسب السؤالين أ) و ج) على ما يلي :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

إذن : المنحنى يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$.

II 2 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$.

لدينا حسب نتيجة السؤال I) 2) : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) : g(x) > 0$

إذن بالأخص : $\forall\, x\, \epsilon\, [0;+\infty[\ ;\ g(x) > 0$

يعني : $\forall\, x\, \epsilon\, [0;+\infty[\ ;\ e^{2x} - 2x > 0$

يعني : $\forall\, x\, \epsilon\, [0;+\infty[\ ;\ e^{2x} > 2x$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الحقيقي الموجب قطعا $\dfrac{1}{e^{2x}}$ نجد :
$$\forall\, x\, \epsilon\, [0;+\infty[\ ;\ 1 > \frac{2x}{e^{2x}}$$

و بالتالي : $\forall\, x\, \epsilon\, [0;+\infty[\ ;\ 1 - \dfrac{2x}{e^{2x}} > 0$

من جهة ثانية لدينا :
$$f(x) = \ln(e^{2x} - 2x)$$
$$= \ln\left(e^{2x}\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)\right)$$
$$= \ln(e^{2x}) + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)\ ;\ avec\ \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) > 0$$
$$= 2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)\ ;\ avec\ \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) > 0$$

و بالتالي : $\forall\, x\, \epsilon\, [0;+\infty[\ ;\ f(x) = 2x + \ln\left(1 - \dfrac{2x}{e^{2x}}\right)$

II 2 ب

لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(2x + \ln\left(1 - \frac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}}\right)\right)$$
$$= 2(+\infty) + \ln\left(1 - \frac{1}{+\infty}\right)$$
$$= (+\infty) + \ln(1-0) = +\infty$$

و بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ $(\mathbf{4})$

II 2 ج

لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(2 + \frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(2 + \frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}}\right)\right)$$
$$= 2 + \left(\frac{1}{\infty}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)$$
$$= 2 + 0 \times \ln(1-0) = 2$$

و بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 2}$ $(\mathbf{5})$

YOUR WAY
جمعية طريقكم لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

و لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)-2x\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{\infty}\right)=\ln(1-0)=0$$

إذن :
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0}\quad\mathbf{(6)}$$

من النهايات (4) و (5) و (6) نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة : $y=2x+0$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

II 2 د

لدينا :
$$f(x)-2x=2x+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)-2x$$
$$=\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)$$

ليكن x عنصرا من المجال $[0;+\infty[$. إذن : $x\geq 0$

و منه : $(\forall x\geq 0)\ ;\ \frac{2x}{e^{2x}}\geq 0$

و ذلك لأن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^{2x}>0$

إذن : $(\forall x\geq 0)\ ;\ \frac{-2x}{e^{2x}}\leq 0$

يعني : $(\forall x\geq 0)\ ;\ 1-\frac{2x}{e^{2x}}\leq 1$

و نعلم حسب نتيجة السؤال II (2) أن :
$$\forall\ x\ \epsilon\ [0;+\infty[\ ;\ 1-\frac{2x}{e^{2x}}>0$$

إذن : $\forall x\geq 0\ ;\ \ 0<1-\frac{2x}{e^{2x}}\leq 1$

يعني : $\forall x\geq 0\ ;\ \ \ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)\leq\ln 1$

يعني : $\forall x\geq 0\ ;\ \ \ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)\leq 0$

و بالتالي : $(\forall x\geq 0)\ ;\ f(x)-2x\leq 0$

و من هذه المتفاوتة نستنتج أن : $(\forall x\geq 0)\ ;\ f(x)\leq 2x$

يعني أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد أسفل المستقيم $(\boldsymbol{D})$ ذو المعادلة $y=2$ على المجال $[0;+\infty[$.

II 3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $f(x)=\ln(e^{2x}-2x)$

إذن :
$$f'(x)=\frac{(e^{2x}-2x)'}{(e^{2x}-2x)}=\frac{2e^{2x}-2}{e^{2x}-2x}=\frac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$$

و بالتالي : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=\frac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$

II 3 ب

لدينا حسب 3) أ) : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=\frac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$

و نعلم حسب I) 2) أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ g(x)>0$

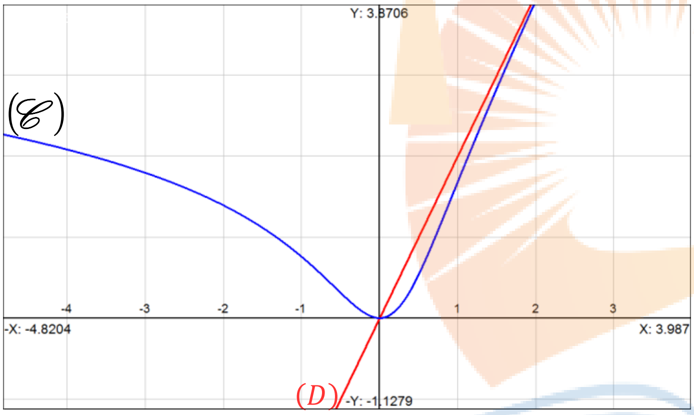
إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة التعبير $(e^{2x}-1)$.

- إذا كان : $x=0$ فإن : $f'(x)=0$.
- إذا كان : $x>0$ فإن : $f'(x)>0$.
- إذا كان : $x<0$ فإن : $f'(x)<0$.

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

II 4



الامتحـــــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريــــــــا
الدورة العــــــادية 2009

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الامتحانات

مـــادة الريـــــــاضيات
العلوم التجـــريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجـــية بمسلكيها
مدة الانجـاز 3h - المعامل 7

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

النقط $A(-2,2,8)$ و $B(6,6,0)$ و $C(2,-1,0)$ و $D(0,1,-1)$

و (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

1 حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$. — 0,75 ن

و استنتج أن : $x+2y+2z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OCD) .

2 تحقق من أن (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(2,4,4)$ و شعاعها 6 . — 0,50 ن

3 أ أحسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (OCD) . — 0,50 ن

3 ب استنتج أن المستوى (OCD) مماس للفلكة (S) . — 0,50 ن

3 ج تحقق من أن : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ ثم استنتج أن النقطة O هي نقطة تماس الفلكة (S) و المستوى (OCD) . — 0,75 ن

التمرين الثاني : (3,0 ن)

نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C التي

ألحاقها على التوالي هي : $a=2-2i$ و $b=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $c=1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$.

1 أكتب على الشكل المثلثي كلا من العددين العقديين a و b . — 1,00 ن

2 نعتبر الدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة O و زاويته $\frac{5\pi}{6}$.

2 أ ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق M' صورة M بالدوران $\mathcal{R}$. بين أن : $z'=bz$ — 0,75 ن

2 ب تحقق من أن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران $\mathcal{R}$. — 0,50 ن

3 بين أن : $\arg c\equiv\arg a+\arg b\ [2\pi]$ ثم حدد عمدة العدد العقدي C . — 0,75 ن

التمرين الثالث : (3,0 ن)

يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء و أربع كرات سوداء و خمس كرات حمراء

(لا يمكن التمييز بينها باللمس) . نسحب عشوائيا و تآنيا ثلاث كرات من الصندوق .

نعتبر الحدثين التاليين :

A : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون " .

B : " الحصول على ثلاث كرات مختلفة مثنى مثنى " .

1 بين أن : $p(A)=\frac{3}{44}$ و $p(B)=\frac{3}{11}$. — 1,50 ن

2 ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة لثلاث كرات بعدد الألوان التي تحملها .

2 أ حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X . — 0,25 ن

2 ب حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب الأمل الرياضي E(X) و المغايرة V(X) . — 1,25 ن

طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الرابع : (2,0 ن)

نضع : $I = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{x}{x+3}\right) dx$ و $J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6)\, dx$

	1	أ	تحقق من أن : $(\forall x \neq -3) \; ; \; \frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$	0,25 ن
	1	ب	بين أن : $I = 1 - 3\ln 2$	0,75 ن
	2		باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $J = -I$.	1,00 ن

التمرين الخامس : (9 ن)

I			نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $\boxed{f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)}$	
			و $(\mathscr{C})$ هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.	
I	1		تحقق من أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; : \; e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$. ثم استنتج أن مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$ و أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$	0,75 ن
I	2		أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثم بين أن : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln 4$ و أوّل النتيجة هندسيا.	0,75 ن
I	3	أ	بين أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1}$ و تحقق أن : $f'(0) = 0$	1,00 ن
I	3	ب	أدرس إشارة $\left(\sqrt{e^x} - 1\right)$ على $\mathbb{R}$ و استنتج أن الدالة f تزايدية على المجال $[0; +\infty[$ و تناقصية على المجال $]-\infty; 0]$.	0,50 ن
I	4	أ	تحقق من أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$	0,25 ن
I	4	ب	بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$	0,75 ن
I	5	أ	تحقق من أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; : \; e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$	0,25 ن
I	5	ب	أدرس إشارة كل من : $\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$ و $\left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$ على $\mathbb{R}$.	0,50 ن
I	5	ج	استنتج أن : $(\forall\, x \,\epsilon\, [0; \ln 4]) \; ; \; e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$.	0,25 ن
I	5	د	بين أن : $(\forall\, x \,\epsilon\, [0; \ln 4]) \; ; \; 0 \leq f(x) \leq x$.	0,75 ن
I	6		أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ نقبل أن للمنحنى $(\mathscr{C})$ نقطتي انعطاف أفصول إحداها أصغر من -1 و أفصول الأخرى أكبر من 2 تحديدهما غير مطلوب) .	0,75 ن
II			لتكن $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\boxed{\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \; ; \; \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}}$	
			في الأسئلة الموالية يمكن استعمال نتائج دراسة الدالة f .	
II	1		بين أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; 0 \leq u_n \leq \ln 4$	0,75 ن
II	2		بين أن المتتالية $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ تناقصية .	0,75 ن
II	3		استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها .	1,00 ن

YOUR WAY
جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

أجوبة امتحان الدورة العادية 2009

التمرين الأول:

1

لدينا : $C(2,-1,0)$ و $D(0,1,-1)$.

إذن : $\overrightarrow{OC}(2,-1,0)$ و $\overrightarrow{OD}(0,1,-1)$.

و منه :
$$\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}-1&1\\0&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&0\\0&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}=(1;2;2)$$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (OCD) .

نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ منظمية على المستوى (OCD) .

إذن : المتجهتان $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ متعامدتان .

و منه : $\overrightarrow{OM}\cdot\left(\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}\right)=0$ يعني : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=0$

أي : $x+2y+2z=0$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى (OCD) .

2

لدينا حسب المعطيات : $(\mathcal{S})$ هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

لدينا : $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-2-x\\2-y\\8-z\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}6-x\\6-y\\-z\end{pmatrix}$

إذن : $\begin{pmatrix}-2-x\\2-y\\8-z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6-x\\6-y\\-z\end{pmatrix}=0$

و منه : $(-2-x)(6-x)+(2-y)(6-y)-z(8-z)=0$

يعني : $(x^2-4x-12)+(y^2-8y+12)+(z^2-8z)=0$

يعني : $(x^2-4x)+(y^2-8y)+(z^2-8z)=0$

يعني : $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=6^2$

إذن $(\mathcal{S})$ هي الفلكة التي مركزها $\Omega(2,4,4)$ و شعاعها 6 .

3 أ

لدينا : $\begin{cases}\Omega(2,4,4)\\(OCD): x+2y+2z=0\end{cases}$

إذن : $d(\Omega,(OCD))=\dfrac{|2+2\times4+2\times4|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{18}{3}=6$

3 ب

بما أن شعاع الفلكة $(\mathcal{S})$ يساوي $d(\Omega,(OCD))=6$.

فإن المستوى (OCD) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$.

3 ج

لدينا $A(-2,2,8)$ و $B(6,6,0)$

إذن : $\overrightarrow{OA}(-2;2;8)$ و $\overrightarrow{OB}(6;6;0)$

و منه : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-2\\2\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}=-12+12+0=0$

إذن : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

و نعلم أن $(\mathcal{S})$ هي مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

إذن $\boxed{O\in(\mathcal{S})}$ لأن $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$. و لدينا كذلك : $\boxed{O\in(ODC)}$.

من (1) و (2) نستنتج أن O نقطة مشتركة بين $(\mathcal{S})$ و المستوى (ODC) .

و بالتالي : (ODC) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة واحدة و هي النقطة O .

التمرين الثاني:

1

لدينا : $a=2-2i$ إذن : $|a|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}$.

يعني أن الشكل المثلثي لـ a يُكتَبُ على الشكل : $a=\sqrt{8}e^{i\theta}$.

لدينا إذن : $2-2i=\sqrt{2}\cos\theta+i\sqrt{2}\sin\theta$

يعني : $\begin{cases}\sqrt{2}\cos\theta=2\\\sqrt{2}\sin\theta=-2\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\\\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}\cos\theta=\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)\\\sin\theta=\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\end{cases}$ إذن : $\theta\equiv\frac{-\pi}{4}[2\pi]$

و بالتالي : $a=\sqrt{8}e^{\frac{-\pi i}{4}}$.

و بنفس الطريقة لدينا : $b=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

إذن : $|b|=\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$

إذن b يُكتبُ على الشكل : $b=e^{i\varphi}=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

يعني : $\cos\varphi+i\sin\varphi=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

أي : $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{-\sqrt{3}}{2}\\\sin\varphi=\frac{1}{2}\end{cases}$ أي : $\begin{cases}\cos\varphi=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\\sin\varphi=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{cases}$

أي : $\begin{cases}\cos\varphi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\\\sin\varphi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}\cos\varphi=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\\\sin\varphi=\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\end{cases}$

و منه : $\varphi\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$ و بالتالي : $b=e^{\frac{i5\pi}{6}}$

2 أ

لدينا $\mathcal{R}$ دوران معرف بما يلي : $\mathcal{R}_O\left(\frac{5\pi}{6}\right) : (\mathcal{P})\longmapsto(\mathcal{P})$

$M(z)\longmapsto M'(z')$

ننطلق من الكتابة : $\mathcal{R}(M)=M'$

إذن : حسب التعريف العقدي للدوران $\mathcal{R}$: $(z'-0)=e^{i\frac{5\pi}{6}}(z-0)$

يعني : $z'=e^{\frac{i5\pi}{6}}z$ أي : $\boxed{z'=b\,z}$ $(*)$

2 ب

لدينا : $aff(A)=a=2-2i$

إذن :
$$b\cdot aff(A)=b\cdot a=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(2-2i)$$
$$=-\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i+1$$
$$=\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i=aff(c)$$

نحصل إذن على ما يلي : $\boxed{aff(C) = b \cdot aff(A)}$ $(**)$

و حسب النتيجة $(*)$ نستنتج أن : $\mathcal{R}(A) = C$.

3

لدينا حسب النتيجة $(**)$: $c = ba$

إذن : $\arg(c) \equiv \arg(ba)\ [2\pi]$.

و منه : $\arg(c) \equiv \arg(a) + \arg(b)\ [2\pi]$

و لدينا : $a = \sqrt{8}e^{\frac{-\pi}{4}i}$ يعني : $\arg(a) \equiv \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

أي : $\arg(a) = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi\ ;\ (k\epsilon\mathbb{Z})$

نختار قيمة عددية للعداد k . ليكن $k = 1$ كمثال .

نحصل على $\frac{7\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي a .

و لدينا كذلك : $b = e^{\frac{5\pi i}{6}}$ يعني : $\arg(b) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$

أي : $\arg(b) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ (k\epsilon\mathbb{Z})$

نختار قيمة من قيم k ليكن $k = 0$.

إذن $\frac{5\pi}{6}$ عمدة للعدد العقدي b .

و بالتالي : $\left(\frac{7\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right)$ عمدة للعدد العقدي c

أي : $\left(\frac{31\pi}{12}\right)$ عمدة للعدد العقدي c .

نستطيع اختيار $k = 0$ لتحديد عمدة لـ a و b .

لدينا : $\arg(a) = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi\ ;\ (k\epsilon\mathbb{Z})$

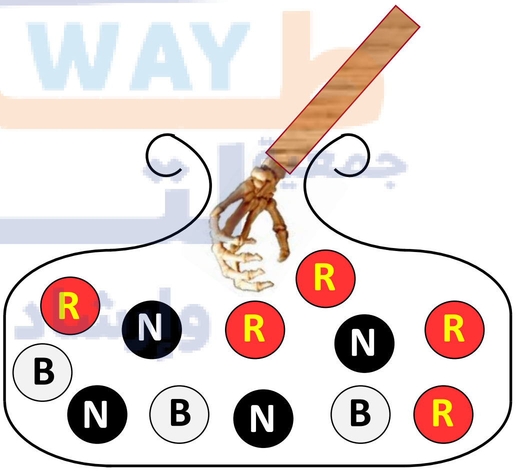
إذن من أجل $(k = 0)$ نحصل على $\frac{-\pi}{4}$ عمدة العدد العقدي a

و لدينا كذلك $\frac{5\pi}{6}$ عمدة للعدد العقدي b

إذن $\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$ عمدة للعدد العقدي c

و بالتالي $\frac{7\pi}{12}$ عمدة للعدد العقدي c .

التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا و آنيا (في آن واحد) ثلاث كرات من صندوق يحتوي على 12 كرة فإن هذه التجربة العشوائية تحتمل C_{12}^{3} نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_{12}^{3} = 220$

بحيث Ω هو كون امكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

لدينا : $p\left(\text{ثلاث كرات بيضاء} \text{ أو } \text{ثلاث كرات سوداء} \text{ أو } \text{ثلاث كرات حمراء}\right) = p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون}\right)$

$$= p\left(\text{ثلاث كرات بيضاء}\right) + p\left(\text{ثلاث كرات سوداء}\right) + p\left(\text{ثلاث كرات حمراء}\right)$$

$$= \frac{C_5^3}{card(\Omega)} + \frac{C_4^3}{card(\Omega)} + \frac{C_3^3}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{10}{220} + \frac{4}{220} + \frac{1}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

إذن : $p(A) = \frac{3}{44}$

و لدينا : $p\left(\text{الحصول على كرة حمراء و كرة سوداء و كرة بيضاء}\right) = p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات مختلفة مثنى مثنى}\right)$

$$= \frac{C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{card(\Omega)} = \frac{5 \times 4 \times 3}{220}$$

$$= \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

إذن : $p(B) = \frac{3}{11}$

2 أ

عندما نسحب ثلاث كرات من صندوق يحتوي على 12 كرة من ثلاثة ألوان مختلفة فإنه يُحتمل أن نحصل على :

- ثلاث كرات من نفس اللون .
- كرتين من نفس اللون و الثالثة مخالفة لهما .
- ثلاث كرات ألوانها مختلفة مثنى مثنى .

إذن المتغير العشوائي X الوارد في التمرين يأخذ ثلاث قيم مختلفة و هي : 1 أو 2 أو 3 . إذن : $X(\Omega) = \{1;2;3\}$.

2 ب

يُقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$\begin{array}{llll} P_X : & \{1;2;3\} & \longmapsto & [0;1] \\ & k & \longmapsto & P_X(k) = p[X = k] \end{array}$$

لدينا الحدث $[X = 1]$ هو الحصول على ثلاث كرات من لون واحد (يعني من نفس اللون)

إذن حسب نتيجة السؤال 1) : $p[X = 1] = p(A) = \frac{3}{44}$

و لدينا كذلك الحدث $[X = 3]$ هو الحصول على ثلاث كرات من ثلاث ألوان مختلفة .

يعني : $p[X = 3] = p(B) = \frac{3}{11}$

يكفي الآن تحديد $p[X = 2]$. و أقترح إنجاز ذلك بطريقتين مختلفتين :

الطريقة الأولى : $p[X=2] = p\begin{pmatrix}\text{الحصول على}\\ \text{كرتين من نفس}\\ \text{اللون و الثالثة}\\ \text{من لون آخر}\end{pmatrix}$

$$= p\begin{pmatrix} R & & R & & N & & N & & B & & B\\ R & \text{أو} & R & \text{أو} & N & \text{أو} & N & \text{أو} & B & \text{أو} & B\\ N & & B & & B & & R & & R & & N\end{pmatrix}$$

$$= \frac{C_5^2C_4^1 + C_5^2C_3^1 + C_4^2C_3^1 + C_4^2C_5^1 + C_3^2C_5^1 + C_3^2C_4^1}{220}$$

$$= \frac{40+30+18+30+15+12}{220} = \frac{145}{220} = \frac{29}{44}$$

الطريقة الثانية :

نعلم أن : $p[X=1] + p[X=2] + p[X=3] = 1$

$$p[X=2] = 1 - p[X=1] - p[X=3] = 1 - \frac{3}{44} - \frac{3}{11} = \frac{29}{44}$$

و بالتالي : قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X

المعرف بما يلي : $P_X \;:\; \{1;2;3\} \;\longmapsto\; [0;1]$

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto P_X(1) = p[X=1] = \tfrac{3}{44}\\ 2 &\longmapsto P_X(2) = p[X=2] = \tfrac{29}{44}\\ 3 &\longmapsto P_X(3) = p[X=3] = \tfrac{3}{11}\end{aligned}$$

و نحسب الأمل الرياضي $E[X]$ للمتغير العشوائي X بما يلي :

$$E[X] = \sum_{k=1}^{k=3} k\cdot p[X=k]$$

$$= 1\times p[X=1] + 2\times p[X=2] + 3\times p[X=3]$$

$$= \left(1\times\frac{3}{44}\right) + \left(2\times\frac{29}{44}\right) + \left(3\times\frac{3}{11}\right)$$

$$= \frac{3}{44} + \frac{58}{44} + \frac{9}{11} = \frac{97}{44}$$

التمرين الرابع :

1 أ

ليكن $x \neq -3$. لدينا : $1 - \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{(x+3)-3}{x+3} = \dfrac{x}{x+3}$

إذن : $(\forall x \neq -3)\;;\; \left(\dfrac{x}{x+3}\right) = 1 - \dfrac{3}{x+3}$

و الهدف من هذا السؤال هو استعمال هذه النتيجة في السؤال الموالي :

1 ب

$$I = \int_{-2}^{-1}\left(\frac{x}{x+3}\right)dx = \int_{-2}^{-1}\left(1 - \frac{3}{x+3}\right)dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} 1\,dx - 3\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$= [x]_{-2}^{-1} - 3[\ln(x+3)]_{-2}^{-1}$$

$$= (-1+2) - 3(\ln 2 - \ln 1) = 1 - 3\ln 2$$

2

$$J = \int_{-2}^{-1}\underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\ln(2x+6)}_{v}\,dx = [uv]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} uv'\,dx$$

$$= [x\ln(2x+6)]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1}\left(\frac{2x}{2x+6}\right)dx$$

$$= -\ln 4 + 2\ln 2 - \int_{-2}^{-1}\left(\frac{2x}{2(x+3)}\right)dx$$

$$= -\ln 4 + \ln 4 - \int_{-2}^{-1}\left(\frac{x}{x+3}\right)dx$$

$$= -\int_{-2}^{-1}\left(\frac{x}{x+3}\right)dx = -I$$

و بالتالي : $J = -I$ أي : $J = 3\ln 2 - 1$

التمرين الخامس :

1 I

ليكن : $x \in \mathbb{R}$ $\quad \left(\sqrt{e^x}-1\right)^2 + 1 = \left(\sqrt{e^x}\right)^2 - 2\sqrt{e^x} + 1 + 1$

$$= e^x - 2\sqrt{e^x} + 2$$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\;;\; e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x}-1\right)^2 + 1$

نلاحظ أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\;;\; \left(\sqrt{e^x}-1\right)^2 \geq 0$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\;;\; \left(\sqrt{e^x}-1\right)^2 + 1 \geq 1$

و منه : $(\forall x\in\mathbb{R})\;;\; e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \geq 1$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\;;\; 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) \in \mathbb{R}$

و بالتالي مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$.

لدينا حسب ما سبق : $e^x > 0$ و $(\forall x\in\mathbb{R})\;;\; e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\;;\; \dfrac{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}{e^x} > 0$

يعني : $(\forall x\in\mathbb{R})\;;\; 1 - \dfrac{2}{\sqrt{e^x}} + \dfrac{2}{e^x} > 0$

2 I

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\ln\left(e^x\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)\right)$$

$$= 2\ln\left((+\infty)\left(1 - \frac{2}{+\infty} + \frac{2}{+\infty}\right)\right)$$

$$= 2\ln(+\infty) = +\infty$$

إذن : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و لدينا كذلك : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$

$$= 2\ln\left(e^{-\infty} - 2\sqrt{e^{-\infty}} + 2\right)$$

$$= 2\ln(0 - 0 + 2) = 2\ln 2 = \ln 4$$

إذن : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 4$

YOUR WAY
جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

هذه النتيجة تُمكننا من أن نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y = \ln 4$ مقارب أفقي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$.

I 3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $f(x) = 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$

إذن :
$$f'(x) = \frac{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)'}{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)} = \frac{2\left(e^x - \frac{2e^x}{2\sqrt{e^x}}\right)}{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)}$$
$$= \frac{2(e^x - \sqrt{e^x})}{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)} = \frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1}$$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x) = \dfrac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1}$

و منه : $f'(0) = \dfrac{2\sqrt{e^0}(\sqrt{e^0} - 1)}{(\sqrt{e^0} - 1)^2 + 1} = 0$

I 3 ب

نحدد في البداية حل المعادلة $\sqrt{e^x} - 1 = 0$.

لدينا : $\sqrt{e^x} - 1 = 0$ يعني : $\sqrt{e^x} = 1$

أي : $e^x = 1$ و منه : $x = \ln 1 = 0$.

إذا كان $x = 0$ فإن $\sqrt{e^x} - 1 = 0$.

إذا كان $x > 0$ فإن $\sqrt{e^x} - 1 > 0$.

إذا كان $x < 0$ فإن $\sqrt{e^x} - 1 < 0$.

بالرجوع إلى تعبير المشتقة $f'(x)$ نلاحظ أن :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ \frac{2\sqrt{e^x}}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1} > 0$$

إذن : إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $(\sqrt{e^x} - 1)$.

نلخص إذن النتائج في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\sqrt{e^x} - 1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$\ln 4$	↘	0	↗	$+\infty$

إذن نلاحظ حسب هذا الجدول أن الدالة f تناقصية على المجال $]-\infty;0]$ و تزايدية على المجال $[0;+\infty[$ و $f(0) = 0$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x) \geq 0$

I 4 أ

ليكن x عددا حقيقيا . لدينا :

$$f(x) = 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$$
$$= 2\ln\left(e^x\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)\right)$$
$$= 2\ln(e^x) + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$$
$$= 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{e^x}} + \dfrac{2}{e^x}\right)$

لدينا حسب السؤال I 2) : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ (1)

و لدينا كذلك :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{2}{x}\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)\right)$$
$$= 2 + \frac{2}{\infty}\ln\left(1 - \frac{2}{\infty} + \frac{2}{\infty}\right)$$
$$= 2 + 0 \times \ln 1 = 2 + 0 \times 0 = 2$$

(2)

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2}$

و لدينا كذلك :
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x\to+\infty} 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$$
$$= 2\ln\left(1 - \frac{2}{\infty} + \frac{2}{\infty}\right)$$
$$= 2\ln(1 - 0 + 0) = 2\ln 1 = 0$$

(3)

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = 0}$

من النهايات (1) و (2) و (3) نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 0$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

I 4 ب

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) = (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x} + 2$$
$$= e^x - 3\sqrt{e^x} + 2$$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$

I 5 أ

لنحل أولا المعادلة : $\sqrt{e^x} - 2 = 0$ التي تصبح : $\sqrt{e^x} = 2$

أي : $e^x = 4$ يعني : $x = \ln 4 = 2\ln 2$

نحصل إذن على الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x} - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\sqrt{e^x} - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

I 5 ب

نلاحظ حسب الجدول السابق أن :

$\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ \left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right) \le 0$

إذن : $\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ e^x - 3\sqrt{e^x}+2 \le 0$

يعني : $\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ e^x - 2\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}+2 \le 0$

يعني : $\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ e^x - 2\sqrt{e^x}+2 \le \sqrt{e^x}$

I 5 ج

لدينا حسب السؤال ج) : $\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ e^x - 2\sqrt{e^x}+2 \le \sqrt{e^x}$

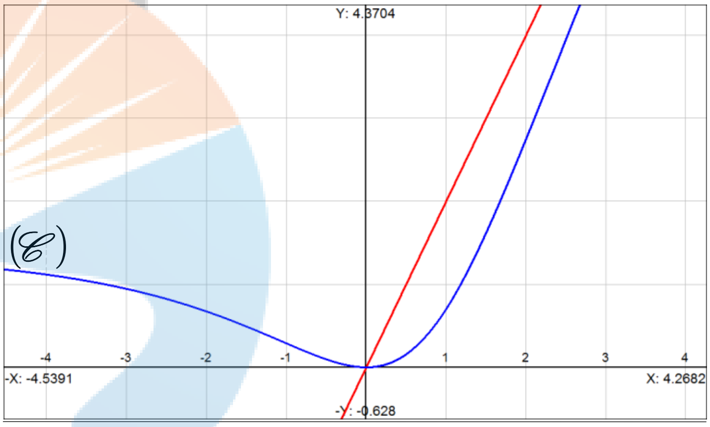
يعني : $\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x}+2\right) \le \ln\left(\sqrt{e^x}\right)$

أي : $\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x}+2\right) \le \frac{x}{2}$

و منه : $\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x}+2\right) \le x$

يعني : $\forall x \in [0;\ln 4]\ ;\ 0 \le f(x) \le x$

I 6



II 1

لنبرهن بالترجع أن : $(P_n):\ (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0 \le u_n \le \ln 4$

لدينا : $0 < 1 < \ln 4$ إذن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0 \le u_n \le \ln 4$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n \in [0;\ln 4]$

إذن حسب نتيجة السوال I 5) د) : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0 \le f(u_n) \le u_n$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0 \le u_{n+1} \le u_n$

و منه حسب الافتراض : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0 \le u_{n+1} \le u_n \le \ln 4$

و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

حصلنا لحد الآن على ما يلي : $\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\ (P_n) \Longrightarrow (P_{n+1})\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0 \le u_n \le \ln 4}\ (*)$

II 2

لدينا حسب النتيجة $(*)$: $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} \le u_n$

إذن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

II 3

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0 \le u_n \le \ln 4$

إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية مصغورة بالعدد 0 .

و بما أنها تناقصية فهي متقاربة و نهايتها ℓ تحقق : $f(\ell)=\ell$.

يعني : $2\ln\left(e^\ell-2\sqrt{e^\ell}+2\right)=\ell$

يعني : $e^\ell-2\sqrt{e^\ell}+2=\sqrt{e^\ell}$ أي : $e^\ell-3\sqrt{e^\ell}+2=0$

أي : $\left(\sqrt{e^\ell}-1\right)\left(\sqrt{e^\ell}-2\right)=0$

و منه : $\left(\sqrt{e^\ell}-2\right)=0$ أو $\left(\sqrt{e^\ell}-1\right)=0$

و منه : $\ell=\ln 4$ أو $\ell=0$.

و بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية فإن : $\ell=0$.

و بالتالي : $\lim_{n\infty} u_n = 0$

طريقكم YOUR WAY لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

الإمتحـــــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريـــــــــــا
الدورة الاستدراكية 2009

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
و تكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الامتحانات

مـــادة الريـــــــاضيات
العلوم التجـــريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجـــية بمسلكيها
مدة الانجـاز 3h - المعامل 7

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطة $A(2,2,-1)$ و المستوى $(\mathcal{P})$ الذي معادلته هي : $2x+y+2z-13=0$ و الفلكة $(\mathcal{S})$ التي مركزها $\Omega(1,0,1)$ و شعاعها 3 .

1 أ - بين أن : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ هي معادلة ديكارتية للفلكة $(\mathcal{S})$ و تحقق من أن A تنتمي إلى $(\mathcal{S})$. — 0,75 ن

1 ب - أحسب مسافة النقطة Ω عن المستوى $(\mathcal{P})$ ثم استنتج أن المستوى $(\mathcal{P})$ مماس للفلكة $(\mathcal{S})$. — 0,75 ن

2 - ليكن (D) المستقيم المار من النقطة A و العمودي على المستوى $(\mathcal{P})$.

2 أ - بين أن $\vec{u}(2,1,2)$ متجهة موجهة للمستقيم (D) و أن $(6,-6,-3)$ هو مثلوث إحداثيات المتجهة : $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}$. — 0,75 ن

2 ب - أحسب : $\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$ ثم استنتج أن المستقيم (D) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في A . — 0,75 ن

التمرين الثاني : (3,0 ن)

1 - حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+25=0$. — 1,00 ن

2 - نعتبر ، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$. النقط A و B و C و D التي ألحاقها هي على التوالي : $a=3+4i$ و $b=3-4i$ و $c=2+3i$ و $d=5+6i$.

2 أ - أحسب : $\dfrac{d-c}{a-c}$ ثم استنتج أن النقط A و C و D نقط مستقيمية . — 0,50 ن

2 ب - بين أن العدد $p=3+8i$ هو لحق النقطة P صورة A بالتحاكي h الذي مركزه B و نسبته $\dfrac{3}{2}$. — 0,50 ن

2 ج - أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $\dfrac{d-p}{a-p}$ ثم استنتج أن $\dfrac{\pi}{4}$ قياس للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}}\right)$ و أن : $PA=\sqrt{2}PD$. — 1,00 ن

التمرين الثالث : (3 ن)

يحتوي صندوق على سبع كرات سوداء و كرتين بيضاوين (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين .

1 - حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X . — 0,50 ن

2 - بين أن : $p[X=0]=\dfrac{1}{36}$ و $p[X=1]=\dfrac{7}{18}$. — 1,50 ن

3 - إعط قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب الأمل الرياضي $E[X]$. — 1,00 ن

طريقكم YOUR WAY
جمعية توجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الرابع : (3 ن)

لتكن $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1+4u_n}{7-2u_n} \;;\; (\forall n\epsilon\mathbb{N}) \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

1,00 ن | 1 | تحقق من أن : $1-u_{n+1} = \dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$

ثم بين بالترجع أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\;;\;1-u_n > 0$

| 2 | نضع : $v_n = \dfrac{2u_n-1}{u_n-1}$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$

1,00 ن | 2 | أ | بين أن $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{6}$ ثم أكتب v_n بدلالة n .

1,00 ن | 2 | ب | بين أن : $u_n = \dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$ و استنتج النهاية $\lim\limits_{n\infty} u_n$

التمرين الخامس : (2 ن)

1,00 ن | 1 | حدد دالة أصلية للدالة $x \to 2x(x^2-1)^{2009}$ على $\mathbb{R}$ و تحقق من أن :

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2009}\,dx = \frac{1}{2010}$$

1,00 ن | 2 | باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\displaystyle\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)\,dx = 6\ln 3 - 2$

التمرين السادس : (6 ن)

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن | 1 | أ | تحقق من أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\;;\; f(x) = x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$

1,00 ن | 1 | ب | بين أن الدالة f زوجية و أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\;;\; f(x) - x = \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

1,00 ن | 1 | ج | بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$

ثم استنتج أن المستقيم $(D) : y = x$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$

0,50 ن | 2 | بين أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد أسفل المستقيم (D) على المجال $[0;+\infty[$.

1,00 ن | 3 | أ | بين أن : $f'(x) = \dfrac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$; $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$ و تحقق من أن : $f'(0) = 0$.

0,50 ن | 3 | ب | بين أن : $\forall\, x\,\epsilon\,[0;+\infty[\;;\; e^{4x}-1 \geq 0$.

ثم استنتج أن : $\forall\, x\,\epsilon\,[0;+\infty[\;;\; e^{4x}-1+4xe^{2x} \geq 0$.

0,50 ن | 3 | ج | ضع جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

1,00 ن | 4 | أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ($(\mathscr{C})$ يقبل نقطتي انعطاف تحديدهما غير مطلوب).

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2009

التمرين الأول :

1 أ

لدينا الفلكة $(\mathcal{S})$ مركزها $\Omega(1,0,1)$ و شعاعها 3 .

إذن معادلتها الديكارتية تكتب على الشكل :

$$(\mathcal{S}) :\ (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=3^2$$

يعني : $(\mathcal{S}) :\ x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$

من جهة ثانية لدينا : $A(2;2;-1)$.

نلاحظ أن : $2^2+2^2+(-1)^2-2(2)-2(-1)-7=0$

إذن : $A\epsilon(\mathcal{S})$

1 ب

لدينا : $\Omega(1,0,1)$ و $(\mathcal{P}) : 2x+y+2z-13=0$

إذن : $d\big(\Omega,(\mathcal{P})\big)=\dfrac{|2\times1+0+2\times1-13|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{9}}=3$

حصلنا إذن على : $d\big(\Omega,(\mathcal{P})\big)=3=Rayon(\mathcal{S})$

و هذا يعني أن المستوى $(\mathcal{P})$ مماس للفلكة $(\mathcal{S})$.

2 أ

لدينا (D) مستقيم عمودي على المستوى $(\mathcal{P})$

إذن : كل متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$ تكون موجهة للمستقيم (D) .

لدينا : $(\mathcal{P}) : 2x+y+2z-13=0$

إذن : المتجهة $\vec{u}(2;1;2)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$.

و بالتالي : $\vec{u}(2;1;2)$ متجهة موجهة للمستقيم (D) .

و لدينا : $\Omega(1,0,1)$ و $\mathrm{A}(2,2,-1)$. إذن : $\overrightarrow{\Omega A}(1,2,-2)$

و منه :

$$\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2&1\\-2&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&2\\-2&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=6\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}$$

و بالتالي : $(6;-6;-3)$ هو مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}$.

2 ب

لدينا : $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=(6;-1,-3)$

إذن : $\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{6^2+(-6)^2+(-3)^2}=\sqrt{81}=9$

و لدينا كذلك : $\vec{u}(2,1,2)$

إذن : $\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

و بالتالي : $\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\dfrac{9}{3}=3$

من جهة أخرى لدينا A نقطة من $(\mathcal{S})$. إذن : $\Omega A=3$

و منه : $\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\Omega A$ يعني : $\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\|\overrightarrow{\Omega A}\|$

يعني : $\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|=\|\overrightarrow{\Omega A}\|\cdot\|\vec{u}\|$

أي : $\|\overrightarrow{\Omega A}\|\cdot\|\vec{u}\|\cdot\sin\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\vec{u}}\right)=\|\overrightarrow{\Omega A}\|\cdot\|\vec{u}\|$

يعني : $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\vec{u}}\right)=1$ أي : $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\vec{u}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$

و هذا يعني أن المتجهتان $\vec{u}$ و $\overrightarrow{\Omega A}$ متعامدتان .

و بما أن $\vec{u}$ متجهة موجهة للمستقيم (D) فإن : $(D)\perp(\Omega A)$

نلاحظ إذن أن المستقيم (D) مار من إحدى نقط الفلكة $(\mathcal{S})$ و هي النقطة A و عمودي على حامل الشعاع ΩA .

إذن : المستقيم (D) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في النقطة A .

التمرين الثاني :

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2-6z+25=0$

لدينا : $\Delta=(-6)^2-4(25)=-64=(8i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين كما يلي :

$$z_1=\frac{6-8i}{2}=3-4i \quad \text{و} \quad z_2=\frac{6+8i}{2}=3+4i$$

2 أ

$$\frac{d-c}{a-c}=\frac{(5+6i)-(2+3i)}{(3+4i)-(2+3i)}=\frac{3+3i}{1+i}=\frac{3(1+i)}{(1+i)}=3$$

إذن : $\dfrac{d-c}{a-c}=3$

يعني : $\arg\left(\dfrac{d-c}{a-c}\right)\equiv0\ [2\pi]$ أي : $\left(\overline{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}}\right)\equiv0\ [2\pi]$

و هذا يعني أن النقط A و D و C مستقيمية

ملاحظة : توجد طريقة أخرى أسهل مما سبق ذكره في الإجابة و هي :

ننطلق من النتيجة $\dfrac{d-c}{a-c}=3$ إذن : $(d-c)=3(a-c)$.

هذه الكتابة العقدية تكافئ باستعمال المتجهات : $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CA}$

و هذا يعني أن النقط A و D و C نقط مستقيمية .

2 ب

لدينا h تحاكي مركزه النقطة B و نسبته $\frac{3}{2}$.

يعني أن h تطبيق معرف بما يلي :

$$\begin{array}{rcccl} h : & (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ & M(z) & \longmapsto & M'(z') \\ & z & \longmapsto & z'=\frac{3}{2}(z-b)+b \end{array}$$

ليكن $p=aff(P)$ و ننطلق من الكتابة $h(A)=P$.

إذن حسب تعريف التحاكي h : $aff(P)=\frac{3}{2}(aff(A)-b)+b$

أي : $p=\frac{3}{2}(a-b)+b$ يعني : $p=\frac{3}{2}(3+4i-3+4i)+3-4i$

أي : $p=\frac{3}{2}(8i)+3-4i$ أي : $p=3+8i$

2 ج

لدينا :

$$\frac{d-p}{a-p}=\frac{(5+6i)-(3+8i)}{(3+4i)-(3+8i)}=\frac{2-2i}{-4i}=\frac{i-1}{2i}$$

$$=\frac{i(i-1)}{2\,i\,i}=\frac{-1}{2}(-i-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

إذن : $\dfrac{d-p}{a-p}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ و منه : $\left|\dfrac{d-p}{a-p}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

يكفي الآن أن نبحث عن θ بحيث : $\dfrac{d-p}{a-p}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}$

ننطلق إذن من الكتابة : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

YOUR WAY
وارشاد شباب المستقبل

التي تصبح : $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

يعني : $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta = \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$ إذن : $\theta \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

نستنتج إذن : $\frac{d-p}{a-p} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$

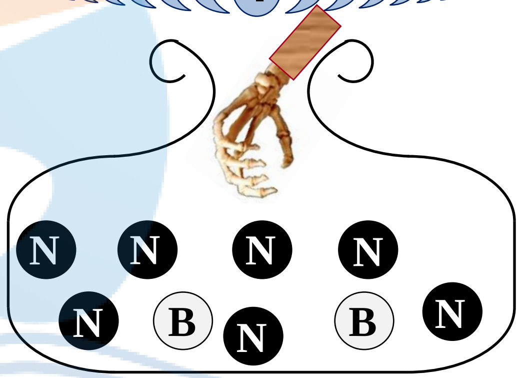
و من هذه النتيجة نستنتج أن : $\begin{cases} \left|\frac{d-p}{a-p}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \arg\left(\frac{d-p}{a-p}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} \left|\frac{d-p}{a-p}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \left(\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PD}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} \sqrt{2}|d-p| = |a-p| \\ \left(\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PD}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

و بالتالي : $\begin{cases} PA = \sqrt{2}\,PD \\ \left(\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PD}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

التمرين الثالث :

1



عندما نسحب عشوائيا و بالتتابع و بدون إحلال كرتين من صندوق يحتوي على تسع كرات فإنه توجد :

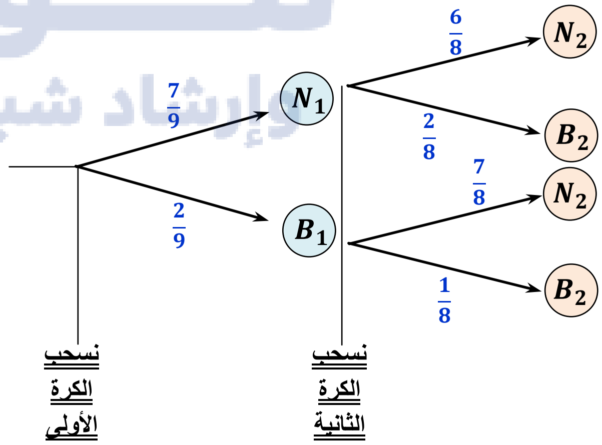
- C_9^1 إمكانية لسحب الكرة الأولى .
- C_9^1 إمكانية لسحب الكرة الثانية .

إذن : $card(\Omega) = C_9^1 \times C_8^1 = 72$

بحيث : Ω هو كون امكانيات هذه التجربة العشوائية .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة (يعني سحب الكرتين بالتتابع و بدون إحلال) بعدد الكرات البيضاء المتبقية في الصندوق بعد السحب .

و نحول التجربة العشوائية إلى شجرة الاحتمالات التالية .



نلاحظ من خلال هذه الشجرة أن تجربتنا العشوائية تحتمل ثلاث نتائج ممكنة و هي :

- إما الحصول على كرتين سوداوين .
- أو الحصول على كرة سوداء و الأخرى بيضاء .
- أو الحصول على كرتين بيضاوين .

في الحالة الأولى تبقى كرتين بيضاوين في الصندوق
في الحالة الثانية تبقى كرة بيضاء واحدة في الصندوق
في الحالة الثالثة تكون الكرات المتبقية في الصندوق كلها سوداء .

إذن المتغير العشوائي X يأخذ ثلاث قيم ممكنة و هي : 0 أو 1 أو 2 .

أو بتعبير آخر نكتب : $X(\Omega) = \{0;1;2\}$

2

$$p[X=0] = p\left(\begin{matrix}\text{الكرات المتبقية}\\ \text{في الصندوق}\\ \text{كلها سوداء}\end{matrix}\right)$$

$$= p\left(\begin{matrix}\text{الكرة الثانية}\\ \text{المسحوبة}\\ \text{بيضاء}\end{matrix} \quad \text{و} \quad \begin{matrix}\text{الكرة الأولى}\\ \text{المسحوبة}\\ \text{بيضاء}\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{C_2^1 \times C_1^1}{card(\Omega)} = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$$

$$p[X=1] = p\left(\begin{matrix}\text{نسحب كرة}\\ \text{بيضاء و أخرى}\\ \text{سوداء}\end{matrix}\right)$$

$$= p\left(\begin{matrix}\text{الأولى سوداء}\\ \text{و الثانية بيضاء}\end{matrix} \quad \text{أو} \quad \begin{matrix}\text{الأولى بيضاء}\\ \text{و الثانية}\\ \text{سوداء}\end{matrix}\right)$$

$$= p\left(\begin{matrix}\text{الأولى بيضاء}\\ \text{و الثانية}\\ \text{سوداء}\end{matrix}\right) + p\left(\begin{matrix}\text{الأولى سوداء}\\ \text{و الثانية بيضاء}\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{C_2^1 \times C_7^1}{72} + \frac{C_2^1 \times C_2^1}{72} = \frac{14}{72} + \frac{14}{72} = \frac{28}{72} = \frac{7}{18}$$

و يمكن أن نجيب بكل بساطة على هذا السؤال بطريقة ثانية :
و سوف نستعمل فيها شجرة الاحتمالات السابقة .

لدينا : $p[X=0] = p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2)$

$$= \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{36}$$

و لدينا : $p[X=1] = p(N_1 \cap B_2) + p(B_1 \cap N_2)$

$$= \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{14}{72} + \frac{14}{72} = \frac{7}{18}$$

3

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$P_X \;:\; \{0;1;2\} \longmapsto [0,1]$$
$$k \longmapsto P_X(k) = p[X=k]$$

أو بتعبير آخر يجب تحديد احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشائي X .

لدينا حسب الأسئلة السابقة : $p[X=1] = \frac{7}{18}$ و $p[X=0] = \frac{1}{36}$.

يكفي الآن تحديد الاحتمال : $p[X=2]$. و من أجل ذلك أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى :

نعلم أن : $p[X=0]+p[X=1]+p[X=2]=1$

إذن :
$$p[X=2]=1-p[X=0]-p[X=1]$$
$$=1-\frac{1}{36}-\frac{7}{18}=\frac{7}{18}$$

الطريقة الثانية : استعمال شجرة الاحتمالات السابقة .

$$p[X=2]=p(N_1\cap N_2)=p(N_1)\times p_{N_1}(N_2)$$
$$=\frac{7}{9}\times\frac{6}{8}=\frac{42}{72}=\frac{7}{12}$$

و بالتالي : قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بـ :

$$P_X\ :\ \{0;1;2\}\ \longmapsto\ [0,1]$$
$$0\ \longmapsto\ P_X(0)=p[X=0]=\frac{1}{36}$$
$$1\ \longmapsto\ P_X(1)=p[X=1]=\frac{7}{18}$$
$$2\ \longmapsto\ P_X(2)=p[X=2]=\frac{7}{12}$$

و منه : نحسب الأمل الرياضي $E[X]$ كما يلي :

$$E[X]=\sum_i x_i\cdot p[X=x_i]=\sum_{k=0}^{k=2}k\cdot p[X=k]$$
$$=0\cdot p[X=0]+1\cdot p[X=1]+2\cdot p[X=2]$$
$$=\left(0\times\frac{1}{36}\right)+\left(1\times\frac{7}{18}\right)+\left(2\times\frac{7}{12}\right)=\frac{14}{9}$$

التمرين الرابع :

1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا . لدينا :

$$1-u_{n+1}=1-\frac{1+4u_n}{7-2u_n}=\frac{(7-2u_n)}{(7-2u_n)}-\frac{(1+4u_n)}{(7-2u_n)}$$
$$=\frac{6-6u_n}{7-2u_n}=\frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1-u_{n+1}=\dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$

لنبين صحة العبارة التالية : $(P_n)\ :\ (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1-u_n>0$

لدينا : $1-0>0$ إذن : $1-u_0>0$

و هذا يعني أن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1-u_n>0$

إذن : $(1-u_n)$ كمية موجبة قطعا .

و منه : $6(1-u_n)$ و $5+2(1-u_n)$ كميتان موجبتان قطعا .

يعني : $\frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$ كمية موجبة قطعا لأنها خارج كميتين موجبتين قطعا .

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}>0$

و منه : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1-u_{n+1}>0$

و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

حصلنا إذن على الأشياء التالية : $\begin{cases}(P_0)\ \text{est vraie}\\ (P_n)\ \Rightarrow\ (P_{n+1})\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع فإن العبارة (P_n) دائما صحيحة .

أو بتعبير آخر : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1-u_n>0$

2 أ

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

لدينا :
$$v_{n+1}=\frac{2u_{n+1}-1}{u_{n+1}-1}=\frac{\dfrac{2(1+4u_n)}{(7-2u_n)}-1}{\dfrac{(1+4u_n)}{(7-2u_n)}-1}$$
$$=\frac{2(1+4u_n)-(7-2u_n)}{(1+4u_n)-(7-2u_n)}=\frac{5}{6}\left(\frac{2u_n-1}{u_n-1}\right)=\frac{5}{6}v_n$$

نحصل إذن على النتيجة التالية : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_{n+1}=\frac{5}{6}v_n$

و هذا يعني أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية و أساسها $\frac{5}{6}$.

إذن الحد العام لهذه المتتالية هو : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n=v_0\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-0}$

و لدينا : $v_0=\dfrac{2u_0-1}{u_0-1}=\dfrac{-1}{-1}=1$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n$

2 ب

ليكن $n\in\mathbb{N}$. لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n=\dfrac{2u_n-1}{u_n-1}=\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \left(\frac{5}{6}\right)^n(u_n-1)=2u_n-1$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \left(\frac{5}{6}\right)^n u_n-\left(\frac{5}{6}\right)^n=2u_n-1$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n-2\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^n-1$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n=\dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n-2}$

نلاحظ أن $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{6}$ و هو عدد موجب و أصغر من 1

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=0$

و منه :
$$\lim_{n\infty}u_n=\lim_{n\infty}\left(\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n-2}\right)=\left(\frac{0-1}{0-2}\right)=\frac{1}{2}$$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty}u_n=\frac{1}{2}$

التمرين الخامس :

1

لدينا : $\left((x^2-1)^{2010}\right)'=2010(2x)(x^2-1)^{2009}$

إذن : $\displaystyle\int\left((x^2-1)^{2010}\right)'\,dx=\int 2010(2x)(x^2-1)^{2009}\,dx$

يعني : $\displaystyle(x^2-1)^{2010}=\int 2010(2x)(x^2-1)^{2009}\,dx$

YOUR WAY طريقكم
جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

أي : $\frac{1}{2010}(x^2-1)^{2010} = \int (2x)(x^2-1)^{2009}\,dx$

إذن : $x \mapsto \frac{1}{2010}(x^2-1)^{2010}$ دالة أصلية لـ $x \mapsto 2x(x^2-1)^{2009}$

و لدينا : $\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2009}\,dx = \left[\frac{(x^2-1)^{2010}}{2010}\right]_1^{\sqrt{2}}$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}^2-1\right)^{2010}}{2010} - \frac{(1-1)^{2010}}{2010} = \frac{1}{2010}$$

2

لدينا : $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)\,dx$

$$= [(x^2+x)\ln(x+1)]_0^2 - \int_0^2 \left(\frac{x^2+x}{x+1}\right)dx$$

$$= (6\ln 3 - 0) - \int_0^2 \frac{x(x+1)}{(x+1)}dx$$

$$= (6\ln 3 - 0) - \int_0^2 x\,dx$$

$$= 6\ln 3 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 6\ln 3 - (2-0)$$

$$= 6\ln 3 - 2$$

التمرين السادس :

1 أ

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-e^{0}}{e^{2x}+e^{0}}\right)$

يعني : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-e^{2x}e^{-2x}}{e^{2x}+e^{2x}e^{-2x}}\right)$

أي : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x) = x\left(\frac{e^{2x}(1-e^{-2x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})}\right)$

و بالتالي : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x) = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$

1 ب

ليكن x عددا حقيقيا . لدينا : $f(-x) = (-x)\left(\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}\right)$

يعني : $f(-x) = (x)\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$

و منه حسب نتيجة 1) أ) : $f(-x) = (x)\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) = f(x)$

حصلنا إذن على ما يلي : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(-x) = f(x)$

إذن f دالة زوجية على $\mathbb{R}$ و تمثيلها المبياني متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

و لدينا : $f(x)-x = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) - x$

$$= x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} - 1\right) = x\left(\frac{1-e^{-2x}-(1+e^{-2x})}{1+e^{-2x}}\right)$$

$$= x\left(\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) = \left(\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x)-x = \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

1 ج

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$

$$= (+\infty)\left(\frac{1-e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}}\right) = (+\infty)\left(\frac{1-0}{1+0}\right) = (+\infty)$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) = \lim_{\substack{u\to-\infty\\ u=-2x}}\left(\frac{ue^{u}}{1+e^{u}}\right)$

$$= \lim_{u\to-\infty}\left(\underbrace{ue^{u}}_{0^-}\right)\left(\frac{1}{1+\underbrace{e^{u}}_{0^+}}\right) = 0\times 1 = 0$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) = 0$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$

$$= \left(\frac{1-e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}}\right) = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$

من النتائج السابقة نحصل على ما يلي : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x\to+\infty}(f(x)-1x) = 0 \end{cases}$

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 1x+0$ مقارب مائل للمنحنى بجوار $+\infty$. أي : $(D) : y = x$ مقارب مائل للمنحنى بجوار $+\infty$

2

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) ، ندرس إشارة الفرق $(f(x)-x)$.

لدينا حسب السؤال 1) أ) : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x)-x = \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

نعلم أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^{-2x} > 0$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ 1+e^{-2x} > 1 > 0$

و منه : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}} > 0$

أي : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} < 0$

YOUR WAY

إذن إشارة الفرق $(f(x)-x)$ تتعلق فقط بإشارة x .

إذا كان $x \geq 0$ فإن $f(x)-x \leq 0$

إذا كان $x \leq 0$ فإن $f(x)-x \geq 0$

و نلخص ما حصلنا عليه في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي لِـ $(\mathscr{C})$ و (D)	$(\mathscr{C})$ يوجد فوق (D)	**نقطة انعطاف**	$(\mathscr{C})$ يوجد أسفل (D)

و بالتالي $(\mathscr{C})$ يوجد أسفل المستقيم (D) على المجال $[0;+\infty[$.

3 أ

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}\right)$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x) = \left(\frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}\right) + x\left(\frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}\right)'$

$$= \left(\frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}\right) + x\left(\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(1+e^{2x})^2}\right)$$

$$= \left(\frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}\right) + x\left(\frac{4xe^{2x}}{(1+e^{2x})^2}\right)$$

$$= \frac{(e^{2x}+1)(e^{2x}-1)+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x) = \frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

و منه : $f'(0) = \frac{e^0-1+4\times 0\times e^0}{(e^0+1)^2} = \frac{1-1+0}{1} = 0$

أي : $f'(0)=0$. و مدلول هذه النتيجة مبيانيا هو أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا أفقياً في النقطة ذات الأفصول صفر .

3 ب

ليكن x عنصرا من المجال $[0;+\infty[$. إذن : $x \geq 0$

و منه : $4x \geq 0$ أي : $e^{4x} \geq e^0$

يعني : $e^{4x} \geq 1$ يعني : $e^{4x}-1 \geq 0$

و بالتالي : $\forall\ x\ \epsilon\ [0;+\infty[\ ;\ e^{4x}-1 \geq 0$

و هذا يعني أن الكمية $(e^{4x}-1)$ كمية موجبة على المجال $[0;+\infty[$.

و نعلم كذلك أن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ 4xe^{2x} \geq 0$.

يعني أن $4xe^{2x}$ كمية موجبة كذلك على المجال $[0;+\infty[$.

إذن : $(e^{4x}-1+4xe^{2x})$ كمية موجبة على $[0;+\infty[$.

و بالتالي : $(\forall x \geq 0)\ ;\ e^{4x}-1+4xe^{2x} \geq 0$

إذن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ \frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \geq 0$

أي : $(\forall x \geq 0)\ ;\ f'(x) \geq 0$

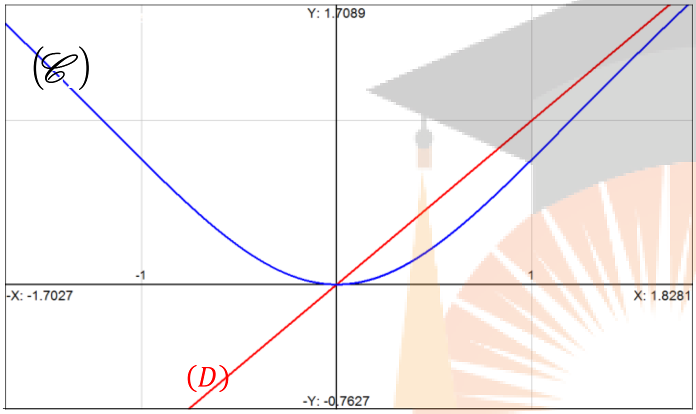
و هذا يعني أن الدالة f دالة تزايدية على المجال $[0;+\infty[$.

3 ج

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	0	$\nearrow$ $+\infty$

ملاحظة : لقد تَمَّ الإقتصار على دراسة الدالة f فقط على المجال $[0;+\infty[$ لأن الدالة f دالة زوجية و منحناها متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب .

4



طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

الإمتحـــــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريـــــــــــا
الدورة العـــــــــادية 2010

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
و تكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

مـــادة الريـــــــاضيات
العلوم التجـــريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجـــية بمسلكيها
مدة الانجـاز 3h - المعامل 7

التمرين الأول : (3,0 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(-1,0,3)$ و $B(3,0,0)$ و $C(7,1,-3)$ و الفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$.

1 بين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$ و استنتج أن $3x+4z-9=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) . — 1,00 ن

2 بين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(3,1,0)$ و أن شعاعها هو 5 . — 0,50 ن

3 ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω و العمودي على المستوى (ABC) .

3 أ بين أن : $\begin{cases}x=3+3t\\y=1 \qquad ; \quad (t\in\mathbb{R})\\z=4t\end{cases}$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) . — 0,50 ن

3 ب بين أن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة (S) في النقطتين $E(6,1,4)$ و $F(0,1,-4)$. — 1,00 ن

التمرين الثاني : (3,0 ن)

1 حل في مجموعة الأعداد العقدية $(\mathbb{C})$ المعادلة : $z^2-6z+10=0$. — 1,00 ن

2 نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=3-i$ و $b=3+i$ و $c=7-3i$.

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

2 أ بين أن : $z'=iz+2-4i$. — 0,50 ن

2 ب تحقق من أن لحق النقطة C' صورة النقطة C بالدوران $\mathcal{R}$ هو $c'=5+3i$. — 0,25 ن

2 ج بين أن : $\frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}i$ ثم استنتج أن المثلث BCC' قائم في النقطة B و أن : $BC=2BC'$. — 1,25 ن

التمرين الثالث : (3 ن)

يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء و ثلاث كرات حمراء و كرتين سوداوين (لا يمكن التمييز بينها باللمس) .

نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من الصندوق .

نعتبر الحدثين التاليين :

A : " الحصول على كرة حمراء واحدة فقط " .

B : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل " .

1 بين أن : $p(A)=\frac{1}{2}$ و $p(B)=\frac{41}{42}$. — 1,00 ن

طريقكم لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل YOUR WAY

		2		نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المسحوبة .
0,25 ن		2	أ	تحقق من أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 و 1 و 2 و 3 .
1,00 ن		2	ب	بين أن : $p[X=0]=\frac{1}{6}$ و $p[X=2]=\frac{3}{10}$.
0,75 ن		2	ج	حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

التمرين الرابع : (3 ن)

$$\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{3u_n-1}{2u_n}\ ;\ (\forall n\in\mathbb{R}) \\ u_0=2 \end{cases}$$

				نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :
0,75 ن		1		بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n-1>0$.
		2		نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1}$
1,00 ن		2	أ	بين أن : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$. و استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
0,75 ن		2	ب	بين أن : $u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$ ثم استنتج أن : $\lim\limits_{n\infty} u_n=1$
0,50 ن		3		أحسب $\lim\limits_{n\infty} w_n$ حيث $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي المتتالية المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ w_n=\ln(u_n)$

التمرين الخامس : (8 ن)

	I			نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=1+4xe^{2x}$
0,50 ن	I	1		بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$
0,50 ن	I	2		بين أن الدالة g تزايدية على المجال $\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$ و تناقصية على المجال $\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right]$.
0,50 ن	I	3	أ	بين أن $g\left(\frac{-1}{2}\right)=1-\frac{2}{e}$ ثم تحقق من أن : $g\left(\frac{-1}{2}\right)>0$
0,25 ن	I	3	ب	استنتج أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ g(x)>0$.
	II			لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$ و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لـِ f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(\lVert\vec{i}\rVert=\lVert\vec{j}\rVert=2cm)$
1,00 ن	II	1		أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ (نذكر أن : $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^u=0$)
0,75 ن	II	2		بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=g(x)$ و استنتج أن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.
0,75 ن	II	3	أ	أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و استنتج أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب .
0,50 ن	II	3	ب	أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$ و استنتج أن المستقيم $(\Delta) : y=x+1$ مقارب للمنحنى بجوار $-\infty$
0,50 ن	II	3	ج	حدد زوج إحداثيات نقطة تقاطع (Δ) و $(\mathscr{C})$ ثم بين أن $(\mathscr{C})$ يوجد أسفل (Δ) على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ و فوق (Δ) على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.
0,25 ن	II	4	أ	بين أن : $y=x$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة O .
0,25 ن	II	4	ب	بين أن للمنحنى $(\mathscr{C})$ نقطة انعطاف أفصولها $\frac{-1}{2}$ و أرتوبها غير مطلوب تحديده.
0,75 ن	II	5		أنشئ المستقيمين (Δ) و (T) و المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1,00 ن	II	6	أ	باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx=1-\frac{e}{2}$
0,50 ن	II	6	ب	بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (T) المماس للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$ هي $(6-2e)\,cm^2$.

أجوبة امتحان الدورة العادية 2010

التمرين الأول :

1

لدينا : $\begin{cases} A(-1;0;3) \\ B(3;0;0) \\ C(7;1;-3) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(4;0;-3) \\ \overrightarrow{AC}(8;1;-6) \end{cases}$

و منه :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 3\vec{i} - 0\vec{j} + 4\vec{k} = 3\vec{i} + 4\vec{k} \end{aligned}$$

إذن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .

إذن المتجهتان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متعامدتان .

يعني : $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$ و منه : $\begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

أي : $3(x+1) + 0y + 4(z-3) = 0$

يعني : $3x + 4z - 9 = 0$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

إذن : $(ABC) \ : \ 3x + 4z - 9 = 0$.

2

لدينا $(\mathcal{S})$ فلكة معرفة بمعادلتها الديكارتية التالية :

$$(\mathcal{S}) : \ x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

إذن : $(\mathcal{S}) : \ (x^2 - 6x) + (y^2 - 2y) + (z^2) - 15 = 0$

يعني : $(\mathcal{S}) : \ (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 - 15 = 10$

أي : $(\mathcal{S}) : \ (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = 5^2$

إذن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(3;1;0)$ و شعاعها 5 .

3 أ

ليكن (Δ) المستقيم المار من Ω و العمودي على المستوى (ABC) .

و لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (Δ) .

بما أن $M \epsilon (\Delta)$ و $\Omega \epsilon (\Delta)$

فإن المتجهة $\overrightarrow{\Omega M}$ موجهة للمستقيم (Δ) .

من جهة أخرى لدينا : $(ABC) : 3x + 4y - 9 = 0$.

إذن المتجهة $\vec{n}(3;0;4)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) .

و بما أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (ABC) .

فإن المتجهتان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{\Omega M}$ مستقيميتان .

يعني : $(\exists t \epsilon \mathbb{R}) \ ; \ \overrightarrow{\Omega M} = t\,\vec{n}$

أي : $(\Delta) : \begin{cases} x - 3 = 3t \\ y - 1 = 0t \\ z - 0 = 4t \end{cases} ; \ (t \epsilon \mathbb{R})$

أي : $(\Delta) : \begin{cases} x = 3t + 3 \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} ; \ (t \epsilon \mathbb{R})$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

3 ب

ليكن $(\alpha;\beta;\gamma)$ مثلوث إحداثيات نقط التقاطع .

إذن : $\begin{cases} (\alpha;\beta;\gamma) \ \epsilon \ (ABC) \\ (\alpha;\beta;\gamma) \ \epsilon \ (\mathcal{S}) \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} \alpha = 3 + 3t \\ \beta = 1 \qquad ; \ (t \epsilon \mathbb{R}) \\ \gamma = 4t \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 6\alpha - 2\beta - 15 = 0 \end{cases}$

نعوض قيم α و β و γ في آخر معادلة نحصل على :

$$(3+3t)^2 + 1^2 + (4t)^2 - 6(3+3t) - 2 - 15 = 0$$

يعني : $25t^2 - 25 = 0$ يعني : $t^2 = 1$

و منه : $t = \pm 1$

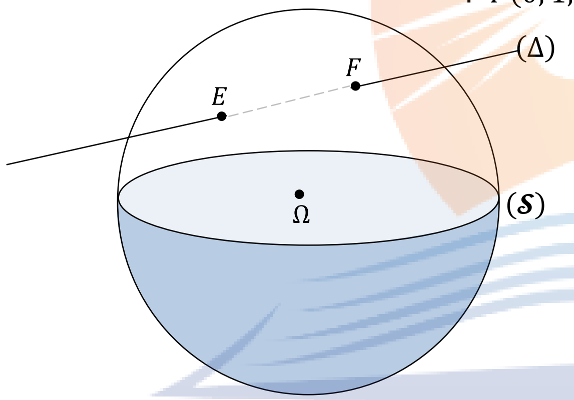
في **الحالة الأولى** : إذا كان $t = 1$.

نعوض t بالعدد 1 في المعادلات الثلاث الأولى نحصل على : $\begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 4 \end{cases}$

الحالة الثانية : إذا كان $t = -1$.

نعوض t بالعدد -1 نحصل على : $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -4 \end{cases}$

و بالتالي : المستقيم (Δ) يقطع الفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطتين $E(6;1;4)$ و $F(0;1;-4)$.



التمرين الثاني :

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 10 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 10 = 36 - 40 = -4 = (2i)^2$

إذن : المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين كما يلي :

$$z_1 = \frac{6 - 2i}{2} = 3 - i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{6 + 2i}{2} = 3 + i$$

2 أ

لدينا : الدوران $\mathcal{R}$ معرف بما يلي : $\mathcal{R}_A\left(\frac{\pi}{2}\right) : \ (\mathcal{P}) \ \mapsto \ (\mathcal{P})$

$M(z) \ \mapsto \ M'(z')$

ننطلق من الكتابة $\mathcal{R}(M) = M'$.

إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب : $(z' - a) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z - a)$

يعني : $z' - (3 - i) = e^{\frac{i\pi}{2}}\big(z - (3 - i)\big)$

توجيه وإرشاد شباب المستقبل
YOUR WAY

يعني : $z' - (3-i) = i(z-3+i)$

يعني : $z' = iz - 3i - 1 + 3 - i$

يعني : $\boxed{z' = iz + 2 - 4i}$ $(*)$

2 ب

ليكن c' لحق النقطة C' . و ننطلق من الكتابة : $\mathcal{R}(C) = C'$.

إذن حسب النتيجة $(*)$ نجد : $c' = ic + 2 - 4i$

يعني : $c' = i(7-3i) + 2 - 4i$

أي : $c' = 7i + 3 + 2 - 4i$

يعني : $c' = 3i + 5$

2 ج

لدينا : $$\frac{c'-b}{c-b} = \frac{(5+3i)-(3+i)}{(7-3i)-(3+i)} = \frac{2+2i}{4-4i} = \frac{2(1+i)}{4(1-i)}$$

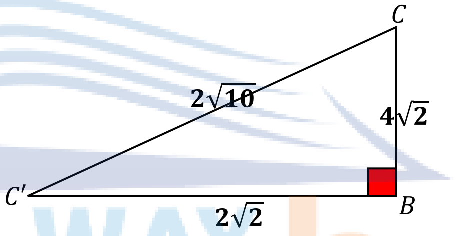
$$= \frac{2(1+i)(1+i)}{4(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+2i-1)}{4(1-(-1))} = \frac{4i}{8} = \frac{1}{2}i$$

إذن : $$\frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i$$

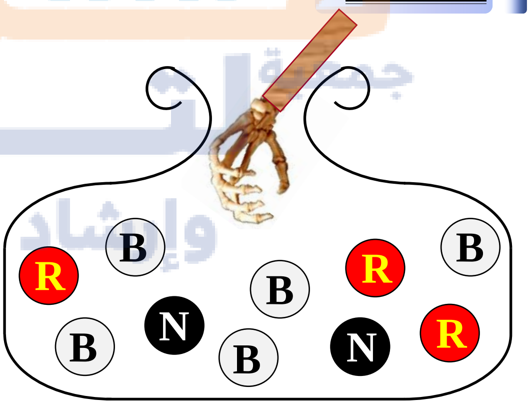
و من هذه النتيجة نحصل على : $$\begin{cases} \left|\dfrac{c'-b}{c-b}\right| = \dfrac{1}{2} \\ \arg\left(\dfrac{c'-b}{c-b}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

أي : $$\begin{cases} |c-b| = 2|c'-b| \\ \left(\overline{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$$ أي : $$\begin{cases} BC = 2BC' \\ \left(\overline{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$$

و هذا يعني أن المثلث BCC' قائم الزاوية في النقطة B و طول أحد أضلاعه يساوي ضعف طول ضلع آخر .



التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات فإن هذه التجربة العشوائية تحتمل C_{10}^4 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_{10}^4 = 210$ بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

لدينا : $$p\left(\begin{array}{c}\text{الحصول على}\\ \text{كرة حمراء}\\ \text{واحدة فقط}\end{array}\right) = p\begin{pmatrix} R & & R & & R \\ B & \text{أو} & B & \text{أو} & B \\ B & & B & & N \\ B & & N & & N \end{pmatrix}$$

$$= p\begin{pmatrix} R \\ B \\ B \\ B \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} R \\ B \\ B \\ N \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} R \\ B \\ N \\ N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{C_3^1 \times C_5^3}{card(\Omega)} + \frac{C_3^1 \times C_5^2 \times C_2^1}{card(\Omega)} + \frac{C_3^1 \times C_5^1 \times C_2^2}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{3 \times 10}{210} + \frac{3 \times 10 \times 2}{210} + \frac{3 \times 5 \times 1}{210} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$$

إذن : $p(A) = \dfrac{1}{2}$

لدينا $B = \{$ الحصول على كرة بيضاء على الأقل $\}$

لحساب احتمال الحدث B توجد طريقتان :

1) الطريقة المتهورة :

يتحقق الحدث B في 9 حالات و هي :

$\boxed{R\quad R\quad R\quad B}$ بـ $C_3^3 \times C_5^1$ إمكانية .

$\boxed{N\quad R\quad R\quad B}$ بـ $C_2^1 \times C_3^2 \times C_5^1$ إمكانية .

$\boxed{N\quad N\quad R\quad B}$ بـ $C_2^2 \times C_3^1 \times C_5^1$ إمكانية .

$\boxed{R\quad R\quad B\quad B}$ بـ $C_3^2 \times C_5^2$ إمكانية .

$\boxed{N\quad R\quad B\quad B}$ بـ $C_2^1 \times C_3^1 \times C_5^2$ إمكانية .

$\boxed{N\quad N\quad B\quad B}$ بـ $C_2^2 \times C_5^2$ إمكانية .

$\boxed{R\quad B\quad B\quad B}$ بـ $C_3^1 \times C_5^3$ إمكانية .

$\boxed{N\quad B\quad B\quad B}$ بـ $C_2^1 \times C_5^3$ إمكانية .

$\boxed{B\quad B\quad B\quad B}$ بـ C_5^4 إمكانية .

إذن : $$p(B) = \frac{5+30+15+30+60+10+30+20+5}{210}$$

$$= \frac{205}{210} = \frac{41}{42}$$

2) الطريقة الذكية : (استعمال الحدث المضاد $\bar{B}$)

لدينا : $B = \{$ الحصول على كرة بيضاء على الأقل $\}$

إذن : $\bar{B} = \{$ الحصول على كرات كلها تخالف اللون الأبيض $\}$

$$p(\bar{B}) = p\left(\begin{array}{c}\text{أربع كرات}\\ \text{مخالفة للون}\\ \text{الأبيض}\end{array}\right) = p\left(\begin{array}{ccc}\text{كرتين حمراوين} & & \text{ثلاث كرات}\\ \text{و كرتين} & \text{أو} & \text{حمراء و كرة}\\ \text{سوداوين} & & \text{سوداء}\end{array}\right)$$

$$= p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث كرات}\\ \text{حمراء و كرة}\\ \text{سوداء}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{كرتين حمراوين}\\ \text{و كرتين}\\ \text{سوداوين}\end{array}\right)$$

$$= \frac{C_3^3 \times C_2^1}{210} + \frac{C_3^2 \times C_2^2}{210} = \frac{5}{210} = \frac{1}{42}$$

إذن : $$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42}$$

2 أ

عندما نسحب أربع كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات ثلاث منها حمراء فإنه يحتمل:

- أن لا نحصل على أية كرة حمراء .
- أن نحصل على كرة حمراء واحدة .
- أن نحصل على كرتين حمراوين .
- أن نحصل على ثلاث كرات حمراء .

إذن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي : 0 و 1 و 2 و 3 .

و هذا يعني أن : $X(\Omega) = \{0;1;2;3\}$

2 ب

الحدث $[X = 2]$ هو الحصول على كرتين حمراوين من بين الكرات الأربع المسحوبة .

إذن :
$$p[X = 2] = p\begin{pmatrix} R & & R & & R \\ R & \text{أو} & R & \text{أو} & R \\ B & & N & & B \\ B & & N & & N \end{pmatrix}$$
$$= \frac{C_3^2 \times C_5^2}{210} + \frac{C_3^2 \times C_2^2}{210} + \frac{C_3^2 \times C_5^1 \times C_2^1}{210}$$
$$= \frac{30}{210} + \frac{3}{210} + \frac{30}{210} = \frac{63}{210} = \frac{3}{10}$$

إذن : $p[X = 2] = \dfrac{3}{10}$

الحدث $[X = 0]$ هو الحصول على أربع كرات كلها تخالف اللون الأحمر .

إذن :
$$p[X = 0] = p\begin{pmatrix} B & & B & & B \\ B & \text{أو} & B & \text{أو} & B \\ B & & B & & N \\ B & & N & & N \end{pmatrix}$$
$$= \frac{C_5^4}{210} + \frac{C_5^3 \times C_2^1}{210} + \frac{C_5^2 \times C_2^2}{210}$$
$$= \frac{5}{210} + \frac{20}{210} + \frac{10}{210} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$$

إذن : $p[X = 0] = \dfrac{1}{6}$

2 ج

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$P_X \;:\; \{0;1;2;3\} \;\longmapsto\; [0,1]$$
$$k \;\longmapsto\; P_k(X) = p[X = k]$$

لدينا حسب السؤال ب) : $p[X = 2] = \frac{3}{10}$ و $p[X = 0] = \frac{1}{6}$.

يكفي إذن تحديد : $p[X = 1]$ و $p[X = 3]$.

لدينا الحدث $[X = 3]$ هو الحصول على ثلاث كرات حمراء .

إذن :
$$p[X = 3] = p(\text{ثلاث كرات حمراء})$$
$$= p\begin{pmatrix} R & & R \\ R & \text{أو} & R \\ R & & R \\ N & & B \end{pmatrix} = \frac{C_3^3 \times C_2^1}{210} + \frac{C_3^3 \times C_5^1}{210}$$
$$= \frac{2}{210} + \frac{5}{210} = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}$$

و لدينا كذلك $[X = 1]$ هو الحصول على كرة حمراء واحدة .

إذن حسب السؤال 1) : $p[X = 1] = p(A) = \frac{1}{2}$

و بالتالي : قانون احتمال المتغير العشوائي X يصبح :

$$P_X \;:\; \{0;1;2;3\} \;\longmapsto\; [0,1]$$
$$\boxed{\begin{array}{lll} 0 & \longmapsto & P_X(0) = p[X = 0] = \dfrac{1}{6} \\ 1 & \longmapsto & P_X(1) = p[X = 1] = \dfrac{1}{2} \\ 2 & \longmapsto & P_X(2) = p[X = 2] = \dfrac{3}{10} \\ 3 & \longmapsto & P_X(3) = p[X = 3] = \dfrac{1}{30} \end{array}}$$

التمرين الرابع :

1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

نعتبر العبارة (P_n) المعرفة بما يلي : $(P_n) : (\forall n \epsilon \mathbb{N})\, ;\, u_n - 1 > 0$

لدينا : $2 - 1 > 0$ إذن : $u_0 - 1 > 0$. يعني : العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\, ;\, u_n - 1 > 0$

لدينا : $$u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1 = \frac{3u_n - 1 - 2u_n}{2u_n} = \frac{u_n - 1}{2u_n}$$

لدينا حسب الافتراض : $\boxed{u_n - 1 > 0}$ **(1)**

إذن : $u_n > 1$ و منه : $\boxed{2u_n > 2 > 0}$ **(2)**

و من النتيجتين (**1**) و (**2**) نستنتج أن : u_{n-1} و $2u_n$ كميتان موجبتان

إذن الكمية $\left(\frac{u_n - 1}{2u_n}\right)$ موجبة قطعا .

أي : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\, ;\, \dfrac{u_n - 1}{2u_n} > 0$

أي : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\, ;\, u_{n+1} - 1 > 0$

إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

لقد حصلنا لحد الآن على ما يلي : $\begin{cases} (P_0)\ est\ vraie \\ (P_n) \implies (P_{n+1})\ ;\ (\forall n \epsilon \mathbb{N}) \end{cases}$

و بالتالي : حسب مبدأ الترجع : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ (P_n)\ est\ vraie$

يعني : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n - 1 > 0$

2 أ

لدينا : $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1} = \frac{\dfrac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}{2\left(\dfrac{3u_n - 1}{2u_n}\right) - 1} = \frac{\dfrac{u_n - 1}{2u_n}}{\dfrac{2u_n - 1}{u_n}}$$
$$= \frac{u_n - 1}{2u_n} \times \frac{u_n}{2u_n - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - 1}{2u_n - 1}\right) = \frac{1}{2} v_n$$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\, ;\, v_{n+1} = \frac{1}{2}\, v_n$

و هذا يعني أن المتتالية $(v_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

إذن حدها العام v_n يكتب على الشكل :

$$v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0} = \left(\frac{u_0 - 1}{2u_0 - 1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{2 - 1}{2 \times 2 - 1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

إذن : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$

طريقكم YOUR WAY جمعية توجيه وإرشاد شباب المستقبل

2 ب

لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ v_n(2u_n - 1) = (u_n - 1)$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 2v_nu_n - v_n = u_n - 1$

أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n(2v_n - 1) = v_n - 1$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n = \dfrac{v_n - 1}{2v_n - 1}$

لدينا : $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و هو عدد موجب أصغر من 1 .

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ أي : $\lim\limits_{n\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

يعني : $\lim\limits_{n\infty} v_n = 0$

و منه : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{v_n - 1}{2v_n - 1}\right) = \dfrac{0 - 1}{0 - 1} = 1$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty} u_n = 1$

3

لتكن $(w_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ w_n = \ln(u_n)$

$$\lim_{n\infty} w_n = \lim_{n\infty}\ln(\mathrm{u_n}) = \ln 1 = 0$$

إذن : $\lim\limits_{n\infty} w_n = 0$

التمرين الخامس :

I 1

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ g'(x) = 4(e^{2x} + 2xe^{2x}) = 4(2x + 1)e^{2x}$

I 2

نعلم أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ 4e^{2x} > 0$

إذن : إشارة $g'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(2x + 1)$.

إذا كان : $x = -\frac{1}{2}$ فإن : $g'(x) = 0$

إذا كان : $x > -\frac{1}{2}$ فإن : $g'(x) > 0$

إذا كان : $x < -\frac{1}{2}$ فإن : $g'(x) < 0$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	↘	$\frac{e-2}{e}$	↗	$+\infty$

و من خلال الجدول نلاحظ أن :

g دالة تزايدية على $\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$ و تناقصية على $\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right]$.

I 3 أ

$$g\left(\frac{-1}{e}\right) = 1 + 4\left(\frac{-1}{e}\right)e^{2\left(\frac{-1}{e}\right)} = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$$

بما أن : $e > 2$ فإن : $\frac{1}{e} < \frac{1}{2}$

يعني : $\frac{2}{e} < 1$ و منه : $1 - \frac{2}{e} > 0$

و بالتالي : $g\left(\frac{-1}{e}\right) > 0$

I 3 ب

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. و نفصل هنا بين حالتين :

الحالة الأولى : $x \geq \frac{-1}{2}$

إذن : $g(x) \geq g\left(\frac{-1}{2}\right) > 0$ لأن g تزايدية على المجال $\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$

و منه : $g(x) > 0\ ;\ \forall\ x \geq \frac{-1}{2}\ \Big|\ (\mathbf{1})$

الحالة الثانية : $x \leq \frac{-1}{2}$

إذن : $g(x) \geq g\left(\frac{-1}{2}\right) > 0$ لأن g تناقصية على المجال $\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right]$.

و منه : $g(x) > 0\ ;\ \forall\ x \geq \frac{-1}{2}\ \Big|\ (\mathbf{2})$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن أنه في كلتا الحالتين نجد : $g(x) > 0$

و بالتالي : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ g(x) > 0$

II 1

لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left((2x - 1)e^{2x} + x + 1\right) = (+\infty)(+\infty) + \infty + 1 = +\infty$$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و لدينا كذلك :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left((2x - 1)e^{2x} + x + 1\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}(2xe^{2x} - e^{2x} + x + 1)\\ &= \lim_{\substack{x\to-\infty\\ u=2x}}\left(\underbrace{ue^u}_{\substack{-\infty\\ \searrow\\ 0^-}} - \underbrace{e^u}_{\substack{-\infty\\ \searrow\\ 0^+}} + \underbrace{\frac{u}{2}}_{\substack{-\infty\\ \searrow\\ -\infty}} + 1\right)\\ &= 0 - 0 - \infty + 1 = -\infty\end{aligned}$$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

II 2

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x) = (2x - 1)e^{2x} + x + 1$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 2e^{2x} + 2(2x - 1)e^{2x} + 1$

يعني : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{2x} + 4xe^{2x} + 1$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 4xe^{2x} + 1 = g(x)$

و نعلم حسب نتيجة السؤال (I 3) ب) أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ g(x) > 0$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x) > 0$

و هذا يعني أن الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

II 3 أ

لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)e^{2x}+1+\frac{1}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)e^{2x}+1+\frac{1}{x}$$
$$=(2-0)e^{+\infty}+1+0=2(+\infty)+1=+\infty$$

إذن :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$$

حصلنا إذن على النهايتين التاليتين :
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty\end{cases}$$

و هذا يعني أن المنحنى يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب .

II 3 ب

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)=\lim_{x\to-\infty}(2x-1)e^{2x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}(2xe^{2x}-e^{2x})$$
$$=\lim_{\substack{u\to-\infty\\u=2x}}\Big(\underbrace{ue^{u}}_{\searrow 0^-}-\underbrace{e^{u}}_{\searrow 0^+}\Big)=0$$

$-\infty$ $-\infty$

0^- 0^+

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)=0$

يعني : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)-1=0$

أي : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=1$

لنحسب نهاية $\frac{f(x)}{x}$ بجوار $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)e^{2x}+1+\frac{1}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)e^{2x}+1+\frac{1}{x}$$
$$=(2-0)e^{-\infty}+1+0=2\times0+1=1$$

إذن :
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

حصلنا إذن لحد الآن على النهايات التالية :
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-1x=1\end{cases}$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى بجوار $-\infty$.

II 3 ج

لتحديد نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ و (Δ) نحل المعادلة $f(x)=(x+1)$

التي تُكافِئُ : $(2x-1)e^{2x}+(x+1)=(x+1)$

يعني : $(2x-1)e^{2x}=0$

بما أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^{2x}\neq0$ فإن : $2x-1=0$ أي : $x=\frac{1}{2}$

إذن أفصول نقطة التقاطع هو $\frac{1}{2}$ و أرتوبها هو : $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

و بالتالي : النقطة $H\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ هي نقطة تقاطع المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) .

لدينا : $f(x)-(x+1)=(2x-1)e^{2x}$

إذا كان : $x>\frac{1}{2}$ فإن : $2x-1>0$ أي : $f(x)>(x+1)$

يعني أن يوجد فوق (Δ) على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

و إذا كان $x<\frac{1}{2}$ فإن : $(2x-1)<0$

يعني : $f(x)<(x+1)$

إذن : المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد أسفل (Δ) على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

II 4 أ

نعلم أن المعادلة الديكارتية للمماس (T) للمنحنى في النقطة التي أفصولها x_0 هي : $(T)\ :\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

لدينا :
$$\begin{cases}f'(0)=g(0)=1\\ f(0)=0\end{cases}$$

إذن : $(T)\ :\ y=f'(0)(x-0)+f(0)$

أي : $(T)\ :\ y=1(x-0)+0$

و بالتالي : $(T)\ :\ y=x$

II 4 ب

لتحديد نقطة الانعطاف ، نحدد النقط التي تنعدم فيها المشتقة الثانية f''

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=g(x)$

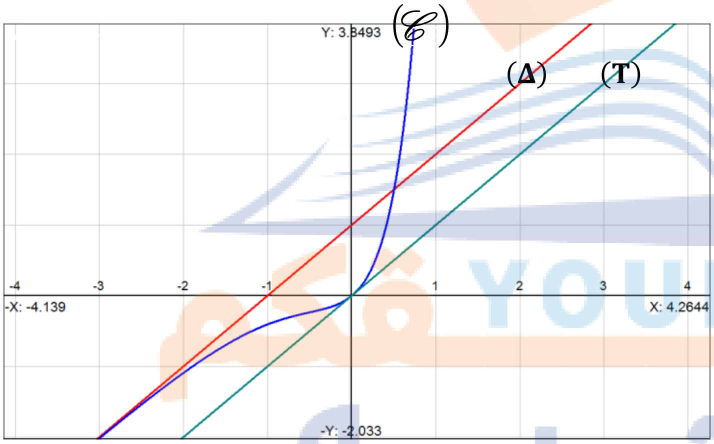
إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f''(x)=g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$

إذن $f''(x)$ تنعدم إذا كان $2x+1=0$

و بالتالي : $f''(x)$ تنعدم إذا كان : $x=\frac{-1}{2}$

يعني أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف واحدة أفصولها $\frac{-1}{2}$

II 5



II 6 أ

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\underbrace{(2x-1)}_{u}\ \underbrace{e^{2x}}_{v'}\,dx=[uv]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}u'v\,dx$$
$$=\left[\left(\frac{2x-1}{2}\right)e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}(2)\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)dx$$
$$=\left(0-\left(\frac{-1}{2}\right)\right)-\int_0^{\frac{1}{2}}e^{2x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}-\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\left(\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\right)=\boxed{1-\frac{e}{2}}$$

II 6 ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (T) و المستقيمين $x = 0$ و $x = \frac{1}{2}$.

نعلم أن التكامل يقيس هندسيا طول أو مساحة أو حجم . إذن :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x) - x| \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |(2x-1)e^{2x} + 1| \, dx$$

نعتبر الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\varphi(x) = (2x-1)e^{2x} + 1$

لدينا : $\varphi'(x) = 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} = 4xe^{2x}$

نلاحظ أن : $(\forall x \geq 0) \; ; \; 4xe^{2x} \geq 0$

يعني : $(\forall x \geq 0) \; ; \; \varphi'(x) \geq 0$

إذن φ دالة تزايدية على المجال $[0; +\infty[$.

و منه : $(\forall x \geq 0) \; ; \; \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$

أي : $(\forall x \geq 0) \; ; \; \varphi(x) \geq 0$

و منه : $(\forall x \geq 0) \; ; \; |\varphi(x)| = \varphi(x)$

إذن بالرجوع إلى المساحة $\mathcal{A}$ نجد :

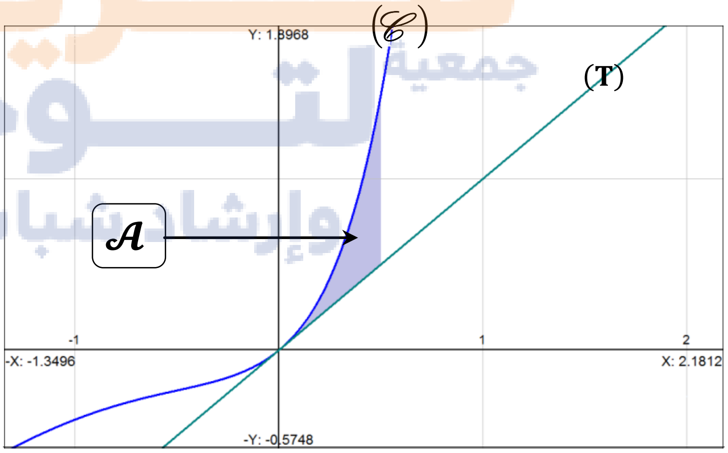
$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \int_0^{\frac{1}{2}} |\varphi(x)| \, dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x) \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} + 1 \, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} \, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \, dx \\ &= \left(1 - \frac{e}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{e}{2}\end{aligned}$$

و بالتالي : $\mathcal{A} = \left(\frac{3}{2} - \frac{e}{2}\right)(unité)^2$

بما أن : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \; cm$ فإن : $l'unité = 2cm$

و منه : $(l'unité)^2 = 4cm^2$. و بالتالي :

$$\mathcal{A} = \left(\frac{3}{2} - \frac{e}{2}\right)(unité)^2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{e}{2}\right)(4cm^2) = (6 - 2e) \; cm^2$$



الإمتحـــــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريـــــــا
الدورة الاستدراكية 2010

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

مــــادة الريـــــــــاضيات
العلوم التجـــــريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجـــية بمسلكيها
مدة الانجـاز 3h ـ المعامل 7

التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

النقط $A(0,-2,0)$ و $B(1,1,-4)$ و $C(0,1,-4)$

و الفلكة $(\mathcal{S})$ التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$.

0,50 ن **1** بين أن مركز الفلكة $(\mathcal{S})$ هي النقطة $\Omega(1,2,3)$ و أن شعاعها هو 5 .

1,00 ن **2** **أ** بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\vec{j}+3\vec{k}$
و استنتج أن : $4y+3z+8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

0,50 ن **2** **ب** أحسب $d\big(\Omega\,,(ABC)\big)$ ثم استنتج أن المستوى (ABC) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$.

3 ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω و العمودي على المستوى (ABC) .

0,50 ن **3** **أ** بين أن : $\begin{cases} x=1 \\ y=2+4t \quad ; \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=3+3t \end{cases}$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

0,25 ن **3** **ب** بين أن مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هو $(1,-2\,,0)$

0,25 ن **3** **ج** تحقق من أن H هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$.

التمرين الثاني : (3 ن)

1,00 ن **1** حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}\,z+64=0$.

2 نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C
التي ألحاقها على التوالي : $a=8i$ و $b=4\sqrt{3}-4i$ و $c=2\big(4\sqrt{3}+4i\big)$.
ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران $\mathcal{R}$
الذي مركزه O و زاويته $\frac{4\pi}{3}$.

0,50 ن **2** **أ** بين أن : $z'=\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

0,25 ن **2** **ب** تحقق من أن النقطة B هي صورة النقطة A بالدوران $\mathcal{R}$.

0,75 ن **2** **ج** بين أن : $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ثم أكتب العدد $\frac{a-b}{c-b}$ على الشكل المثلثي .

0,50 ن **2** **د** استنتج أن المثلث ABC متساوي الأضلاع .

التمرين الثالث : (3 ن)

يحتوي صندوق على ثماني كرات تحمل الأعداد 1 و 1 و 1 و 2 و 2 و 2 و 3 و 3
نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق .
ليكن A الحدث : " الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 " .
و B الحدث : " الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل العدد 3 " .

1,25 ن **1** بين أن $p(A)=\frac{3}{28}$ و أن : $p(B)=\frac{13}{28}$

2 ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا .

0,25 ن **2** **أ** حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

YOUR WAY

0,75 ن		2	ب	بين أن : $p[X=1]=\frac{15}{28}$
0,75 ن		2	ج	إعط قانون احتمال المتغير العشوائي X .

التمرين الرابع : (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{21+u_n} \; ; \; (\forall n\epsilon\mathbb{N}) \\ u_0=1 \end{cases}$$

0,50 ن		1		بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \; ; \; u_n>0$.
0,75 ن		2		بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$
0,50 ن		3		بين أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ تناقصية و أنها متقاربة .
0,75 ن		4	أ	بين بالترجع أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \; ; \; u_n\leq\left(\frac{1}{7}\right)^n$
0,50 ن		4	ب	حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$.

التمرين الخامس : (8 ن)

	I			نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^3-x-2\ln x+3$
0,25 ن	I	1	أ	تحقق من أن : $\forall x\epsilon]0;+\infty[: 3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$
0,50 ن	I	1	ب	بين أن : $\forall x\epsilon]0;+\infty[: g'(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$
0,25 ن	I	2	أ	تحقق من أن : $\forall x\epsilon]0;+\infty[: \frac{3x^2+3x+2}{x}>0$
0,50 ن	I	2	ب	استنتج أن إشارة $g'x)$ هي إشارة $(x-1)$ على المجال $]0;+\infty[$
0,50 ن	I	3	أ	بين أن الدالة g تناقصية على المجال $]0;1]$ و تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.
0,50 ن	I	3	ب	استنتج أن : $\forall x\epsilon]0;+\infty[: g(x)>0$ (لاحظ أن : $g(1)>0$) .
	II			نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\,cm)$

1,00 ن	II	1		بين أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن f تزايدية على $]0;+\infty[$.
0,50 ن	II	2	أ	بين أن : $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ ثم أوّل النتيجة هندسيا .
0,75 ن	II	2	ب	بين أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1+\ln x}{x^2}=0$ ثم أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (نذكر أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)
0,50 ن	II	2	ج	بين أن : $(\Delta) : y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.
0,50 ن	II	3		بين أن $y=3(x-1)$ هي معادلة للمستقيم المماس للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي زوج إحداثيتيها $(1;0)$.
0,75 ن	II	4		أنشئ المستقيم (Δ) و $(\mathscr{C})$ (نقبل أن لـ $(\mathscr{C})$ نقطة انعطاف وحيدة غير مطلوب تحديدها)
1,00 ن	II	5	أ	باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}$
0,50 ن	II	5	ب	بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathscr{C})$ و (Δ) و المستقيمين $x=1$ و $x=e$ هي : $\left(1-\frac{1}{e}\right)cm^2$.

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2010

التمرين الأول :

1

لدينا الفلكة $(\mathcal{S})$ معرفة بمعادلتها الديكارتية التالية :

$$(\mathcal{S}) :\ x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$$

نغير شكل المعادلة بالطريقة التالية :

$$(x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2-6z)-11=0$$

يعني : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-11=14$

يعني : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$

إذن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1;2;3)$ و شعاعها $R=5$.

2 أ

لدينا : $A(0;-2;0)$ و $B(1;1;-4)$ و $C(0;1;-4)$.

إذن : $\overrightarrow{AB}(1;3;-4)$ و $\overrightarrow{AC}(0;3;-4)$.

و منه :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}&=\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}\\&=\begin{vmatrix}3&3\\-4&-4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\-4&-4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\3&3\end{vmatrix}\vec{k}\\&=0\vec{i}-(-4)\vec{j}+3\vec{k}\\&=4\vec{j}+3\vec{k}\end{aligned}$$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) .

فإن : المتجهتان $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AM}$ متعامدتان .

يعني أن : $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

يعني : $\begin{pmatrix}x\\y+2\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}=0$

يعني : $0x+4(y+2)+3z=0$ يعني : $4y+3z+8=0$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

2 ب

لدينا : $\Omega(1,2,3)$ و $(ABC)\ :\ 4y+3z+8=0$

إذن : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|0+8+9+8|}{\sqrt{0^2+4^2+3^2}}=\dfrac{25}{\sqrt{25}}=\sqrt{25}=5$

نلاحظ أن : $d(\Omega,(ABC))=R$

إذن المستوى (ABC) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في النقطة $H(\alpha,\beta,\gamma)$

3 أ

علما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(0,4,3)$ منظمية على المستوى (ABC) .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (Δ) .

بما أن (Δ) مار من Ω و عمودي على (ABC) .

فإن المتجهتان $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهتان مستقيميتان .

يعني : $(\exists t\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \overrightarrow{\Omega M}=t\,\vec{n}$

يعني : $(\Delta)\ :\ \begin{cases}x-1=0t\\y-2=4t\ \ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})\\z-3=3t\end{cases}$

يعني : $(\Delta)\ :\ \begin{cases}x=1\\y=4t+2\ \ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})\\z=3t+3\end{cases}$

و هذه النظمة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

3 ب

لدينا : $\begin{cases}(ABC) : 4y+3z+8=0\\(\Delta) : \begin{cases}x=1\\y=2+4t\ \ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})\\z=3t+3\end{cases}\end{cases}$

نعلم أن $H(\alpha,\beta,\gamma)$ هي نقطة تماس الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى (ABC) .

إذن : $\boxed{(\Omega H)\perp(ABC)}$ (1)

و نعلم كذلك أن : $\boxed{(\Delta)\perp(ABC)}$ (2) و $\boxed{\Omega\epsilon(\Delta)}$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $(\Omega H)=(\Delta)$ يعني : $H\epsilon(\Delta)$

و لتحديد إحداثيات النقطة H ننطلق من النظمة التالية : $\begin{cases}H\epsilon(\Delta)\\H\epsilon(ABC)\end{cases}$

و هذه النظمة تُكافئ : $\begin{cases}\alpha=1\\\beta=4t+2\\\gamma=3t+3\\4\beta+3\gamma+8=0\end{cases}\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})$

نعوض قيم α و β و γ في المعادلة الرابعة من النظمة نحصل على :

$$4(4t+2)+3(3t+3)+8=0$$

نحل هذه المعادلة البسيطة نحصل على : $t=-1$

نعوض t بالعدد -1 في المعادلات الثلاث الأولى نجد :

$$\begin{cases}\alpha=1\\\beta=4(-1)+2=-2\\\gamma=3(-1)+3=0\end{cases}$$

و بالتالي : $H(1;-2;0)$ هي نقطة تقاطع (Δ) و المستوى (ABC) .

3 ج

للتحقق من أن $H(1;-2;0)$ هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$ يكفي أن نتحقق من أن مثلوث إحداثيات النقطة H يحقق كلا من معادلتي المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$.

لدينا : $\begin{cases}(\mathcal{S}) :\ x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0\\(ABC) : 4y+3z+8=0\end{cases}$

يكفي إذن أن نعوض x و y و z على التوالي بالأعداد 1 و -2 و 0 في معادلتي (ABC) و $(\mathcal{S})$ و نرى هل تتحقق المتساويات .

لدينا : $1^2+(-2)^2+0^2-2\times1-4(-2)-6\times0-11=0$

إذن : $H\ \epsilon\ (\mathcal{S})$

و لدينا كذلك : $4(-2)+3(0)+8=-8+8=0$

إذن : $H\ \epsilon\ (ABC)$

و بالتالي : H هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$.

التمرين الثاني :

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}\,z+64=0$

لدينا : $\Delta=\left(-8\sqrt{3}\right)^2-4\times64=-64=(8i)^2$

إذن : المعادلة تقبل الحلين العقديين z_1 و z_2 المعرفين بما يلي :

$$z_1=\frac{8\sqrt{3}-8i}{2}=4\sqrt{3}-4i\quad \text{و}\quad z_2=\frac{8\sqrt{3}+8i}{2}=4\sqrt{3}+4i$$

YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

2 أ

لدينا :
$$\begin{cases} aff(A) = a = 8i \\ aff(B) = b = 4\sqrt{3} - 4i \\ aff(C) = c = 2(4\sqrt{3} + 4i) \\ aff(M) = z \\ aff(M') = z' \end{cases}$$

و لدينا الدوران $\mathcal{R}$ معرف بما يلي :
$$\mathcal{R}_O\left(\frac{4\pi}{3}\right) : \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران $\mathcal{R}$: $(z' - 0) = e^{\frac{i4\pi}{3}}(z - 0)$

نطلق من الكتابة : $\mathcal{R}(M) = M'$

يعني : $z' = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) z$

يعني : $z' = \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) z$

يعني : $z' = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) z$

يعني : $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$

2 ب

لدينا : $aff(A) \times \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8i\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$$= -4i + 4\sqrt{3} = aff(B)$$

حصلنا إذن على العلاقة التالية : $aff(A) = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times aff(B)$

و هي نفسها الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$

و من تلك الكتابة نستنتج أن : $\mathcal{R}(A) = B$

2 ج

لدينا :
$$\frac{a-b}{c-b} = \frac{8i - (4\sqrt{3} - 4i)}{2(4\sqrt{3} + 4i) - (4\sqrt{3} - 4i)}$$
$$= \frac{12i - 4\sqrt{3}}{4\sqrt{3} + 12i} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}i - 1)}{4\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{(\sqrt{3}i - 1)(\sqrt{3}i - 1)}{(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3}i - 1)} = \frac{(\sqrt{3}i)^2 - 2(\sqrt{3}i) + 1^2}{(\sqrt{3}i)^2 - 1}$$
$$= \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{-4} = \frac{-2}{-4} + \frac{-2\sqrt{3}i}{-4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

إذن : $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

2 د

حصلنا على : $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ يعني : $\begin{cases} \left|\frac{a-b}{c-b}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} |a-b| = |c-b| \\ \overline{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} BA = BC \\ \overline{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

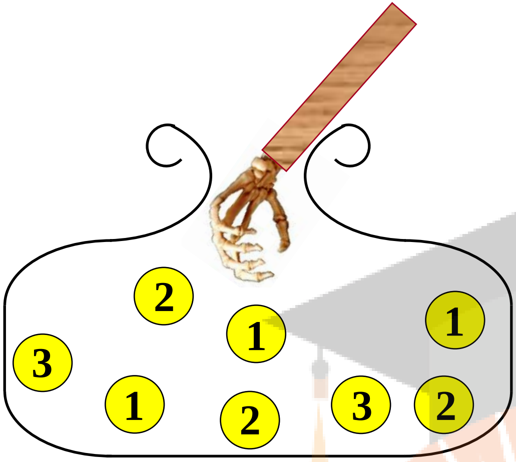
أو بتعبير آخر : $\begin{cases} BA = BC \\ A\hat{B}C = 60° \end{cases}$

و هذا يعني أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B

و قياس الزاوية $\hat{B}$ هو $60°$.

و بالتالي : ABC مثلث متساوي الأضلاع .

التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على 8 كرات فإنه توجد C_8^1 إمكانية لسحب الكرة الأولى و توجد C_7^1 إمكانية لسحب الكرة الثانية .

إذن هذه التجربة العشوائية تحتمل $C_8^1 \times C_7^1$ نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_8^1 \times C_7^1 = 8 \times 7 = 56$

بحيث : Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

للحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 لدينا :

C_3^1 إمكانية لسحب كرة أولى تحمل 2 في السحبة الأولى .

C_2^1 إمكانية لسحب كرة ثانية تحمل 2 في السحبة الثانية .

إذن احتمال الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 يساوي :
$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{56} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل 3 يمكن أن يتم عن طريق حالتين و هما :

الحالة الأولى : الحصول على الكرة الأولى تحمل 3 و الكرة الثانية تخالف 3 بـ $C_2^1 \times C_7^1$ إمكانية .

الحالة الثانية : الحصول على الكرة الأولى مخالفة لـ 3 و الكرة الثانية تحمل 3 بـ $C_6^1 \times C_2^1$ إمكانية .

إذن : احتمال الحصول على كرتين إحداهما على الأقل 3 يساوي :
$$p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{C_2^1 \times C_7^1 + C_6^1 \times C_2^1}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

2 أ

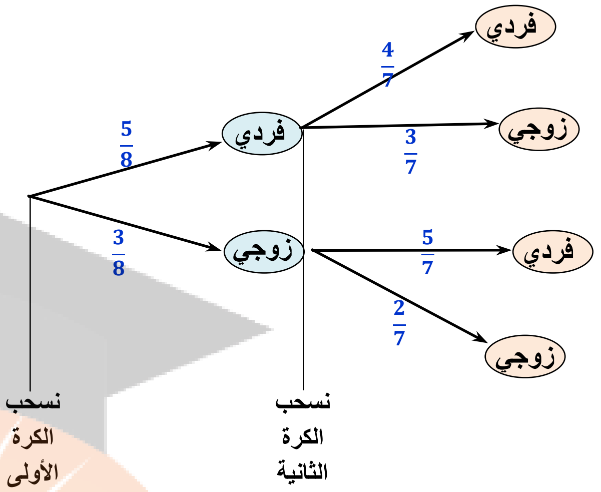
ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا .

عندما نسحب كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على خمس كرات تحمل أعدادا فردية و 3 كرات تحمل أعدادا زوجية . فإنه يُحتمل أن نحصل على كرات كلها تحمل أعدادا فردية أو كرة واحدة تحمل عددا فرديا .

و يمكن ألا نحصل على أية كرة تحمل عددا فرديا .

إذن : القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 أو 1 أو 2
أو بتعبير أجمل : $X(\Omega)=\{0;1;2\}$

للإجابة على الأسئلة الأخرى نستعين بشجرة الاحتمالات التالية و التي تَمَّ الحصول عليها انطلاقا من التجربة العشوائية (السحب العشوائي بالتتابع و بدون إحلال)



2 ب

$p[X=1]$ هو احتمال الحصول بالضبط على كرة تحمل عددا فرديا .

إذن حسب شجرة الاحتمالات السابقة :

$$p[X=1]=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{56}+\frac{15}{56}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$$

2 ج

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق P_X التالي :

$P_X\ :\ \{0;1;2\}\longmapsto[0;1]$

لدينا حسب السؤال 1) : $p(A)=\frac{3}{28}$ إذن : $p[X=0]=\frac{3}{28}$

و لدينا كذلك : $p[X=2]=1-p[X=0]-p[X=1]$

$$=1-\frac{3}{28}-\frac{15}{28}=\frac{5}{14}$$

و بالتالي : قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي : $P_X\ :\ \{0;1;2\}\longmapsto[0;1]$

$$0\longmapsto p[X=0]=\frac{3}{28}$$
$$1\longmapsto p[X=1]=\frac{15}{28}$$
$$2\longmapsto p[X=2]=\frac{5}{14}$$

التمرين الرابع :

1

لنبرهن على صحة العبارة (P_n) التالية : $(P_n)\ :\ (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$

لدينا : $u_0=1>0$ إذن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$

إذن : u_n كمية موجبة قطعا .

و منه فإن الكميتان $3u_n$ و u_n+21 موجبتان قطعا كذلك .

إذن الكمية $\frac{3u_n}{u_n+21}$ موجبة قطعا باعتبارها خارج كميتين موجبتين .

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \frac{3u_n}{21+u_n}>0$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}>0$

يعني أن العبارة (P_{n+1}) عبارة صحيحة .

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$

2

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

لدينا : $u_n>0$ إذن التعبير $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مُعَرَّف .(المقام يجب أن يخالف الصفر)

لدينا : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3u_n}{21+u_n}\times\frac{1}{u_n}=\frac{3}{21+u_n}$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3}{21+u_n}$

نعلم أن : $u_n>0$ إذن : $21+u_n>21$

يعني : $\frac{1}{21+u_n}<\frac{1}{21}$ يعني : $\frac{3}{21+u_n}<\frac{3}{21}$

يعني : $\frac{3}{21+u_n}<\frac{1}{7}$ يعني : $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{1}{7}$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$

3

نعلم أن : $\frac{1}{7}<1$

نضرب هذه المتفاوتة في العدد الموجب قطعا u_n نحصل على :

$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \frac{1}{7}u_n<u_n}$ (1)

و نعلم كذلك حسب السؤال 2) أن : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n}$ (2)

إذن من النتيجتين (1) و (2) نجد ما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<u_n$

و بالتالي : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

و بما أنها مصغورة بالعدد 0 ($u_n>0$) فإنها متقاربة .

4 أ

من أجل $n=0$. لدينا : $u_0=1\le\left(\frac{1}{7}\right)^0$

إذن العبارة صحيحة من أجل $n=0$

نفترض أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n\le\left(\frac{1}{7}\right)^n$

لدينا حسب السؤال 2) : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n\le\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^n$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}\le\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

إذن العبارة صحيحة من أجل $(n+1)$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n\le\left(\frac{1}{7}\right)^n$

4 ب

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0<u_n\le\left(\frac{1}{7}\right)^n$

و بما أن : $\left(\frac{1}{7}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و هو عدد موجب و أصغر من 1

فإن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \underset{\overset{\swarrow n\infty}{0}}{0} < u_n \le \underset{\overset{\swarrow n\infty}{0}}{\left(\frac{1}{7}\right)^n}$

و بالتالي : $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول على الصفر . $\lim\limits_{n\infty} u_n = 0$

التمرين الخامس :

I 1 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا :

$$(x-1)(3x^2+3x+2) = 3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2 = 3x^3-x-2$$

I 1 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$: إذن

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3-x-2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

I 2 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. يعني : $x > 0$

إذن : $3x^2+3x+2 > 0$ و $x > 0$

و منه : $\frac{3x^2+3x+2}{x}$ موجبة قطعا باعتبارها خارج كميتين موجبتين قطعا .

و بالتالي : $(\forall x > 0)\ ;\ \frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$

I 2 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

و لقد علمنا من قبلُ أن : $(\forall x > 0)\ ;\ \frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$

إذن : إشارة $g'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $(x-1)$ على المجال $]0;+\infty[$.

I 3 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;1]$. إذن : $x \le 1$

يعني : $(x-1) \le 0$ و منه : $g'(x) \le 0$

يعني أن الدالة g تناقصية على المجال $]0,1]$.

ليكن x عنصرا من المجال $[1;+\infty[$. إذن : $x \ge 1$

و منه : $(x-1) \ge 0$ يعني : $g'(x) \ge 0$

يعني أن الدالة g تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.

I 3 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : $x\ \epsilon\ ]0,1]$ يعني : $x \le 1$

إذن : $g(x) \ge g(1)$ (لأن g تناقصية على $]0;1]$)

و لدينا : $g(1) > 0$. إذن : $\boxed{\forall\ x\ \epsilon\ ]0;1]\ ;\ g(x) > 0}$ (1)

الحالة الثانية : $x\ \epsilon\ [1;+\infty[$ يعني : $x \ge 1$

إذن : $g(x) \ge g(1)$ (لأن g تزايدية على $[1;+\infty[$)

و لدينا : $g(1) > 0$. إذن : $\boxed{\forall\ x\ \epsilon\ [1;+\infty[\ ;\ g(x) > 0}$ (2)

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $\forall\ x\ \epsilon\ ]0;+\infty[\ ;\ g(x) > 0$.

II 1

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x) = x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2}$

إذن :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right) - 2x(x-1+\ln x)}{x^4} \\ &= 1 + \frac{x^2+x-2x^2+2x-2x\ln x}{x^4} \\ &= 1 + \frac{-x^2+3x-2x\ln x}{x^4} = \frac{x^3-x-2\ln x+3}{x^3} \end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall x > 0)\ ;\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

نعلم حسب السؤال I) 3) ب) : $(\forall x > 0)\ ;\ g(x) > 0$

و لدينا : $(\forall x > 0)\ ;\ x^3 > 0$

إذن : $(\forall x > 0)\ ;\ \frac{g(x)}{x^3} > 0$

يعني : $(\forall x > 0)\ ;\ f'(x) > 0$

و بالتالي : f دالة تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

II 2 أ

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+}\left(x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x\to0^+}\left(x-1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\overset{0^+}{\swarrow}\,+\infty}\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\overset{0^+}{\swarrow}\,+\infty}+\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\overset{0^+}{\swarrow}\,-\infty}\right)\right) \\ &= 0-1+(+\infty)(1-\infty-\infty) \\ &= -1+(+\infty)(+\infty) = -1-\infty = -\infty \end{aligned}$$

و بالتالي : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

و تأويل هذه النهاية هندسيا هو : " المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (محور الأراتيب) مقارب عمودي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار الصفر على اليمين

II 2 ب

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right) \\ &= 0(1-0+0) = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(x-1) + \lim_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$$

$$= (+\infty)+0 = +\infty$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ **(1)**

II 2 ج

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{x-1+\ln x}{x^3}\right)$

$$= 1-0+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= 1+0(1-0+0) = 1$$

(2)

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1}$

و لدينا كذلك : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$

$$= -1+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$$

$$= -1+0 = -1$$

(3)

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = -1}$

من النهايات (**1**) و (**2**) و (**3**) نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

II 3

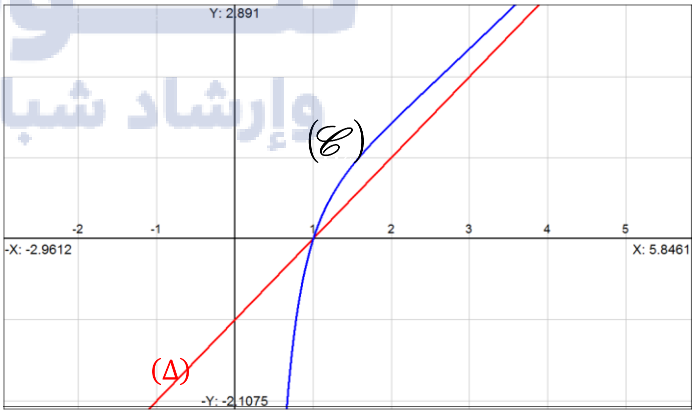
معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي زوج إحداثيتيها $(1,0)$

تكتب على الشكل : $(T) : y = f'(1)(x-1)+f(1)$

لدينا : $f(1) = 0$ و $f'(1) = 3$

إذن : $(T) : y = 3(x-1)$

II 4



II 5 أ

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \int_1^e \underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{u'} \times \underbrace{(\ln x)}_{v} dx = [uv]_1^e - \int_1^e uv\,dx$$

$$= \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$= \frac{-1}{e}-\frac{1}{e}+1 = \boxed{1-\frac{2}{e}}$$

II 5 ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$.

نقيس المساحة $\mathcal{A}$ باستعمال التكامل التالي :

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)-(x+1)|\,dx = \int_1^e \left|\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right|dx$$

و لدينا : $x \in [1,e]$ إذن : $\boxed{x > 1}$ **(1)** و منه : $\boxed{\ln x > 0}$ **(2)**

نجمع المتفاوتتين (1) و (2) طرفا بطرف نجد : $x+\ln x > 1$

يعني : $\forall\, x \in [1,e]\ ;\ x-1+\ln x > 0$

و منه : $\forall\, x \in [1;e]\ ;\ \dfrac{x-1+\ln x}{x^2} > 0$

أي : $\forall\, x \in [1;e]\ ;\ \left|\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}\right| = \dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$

و بالتالي بالرجوع إلى آخر تعبير للمساحة $\mathcal{A}$ نجد :

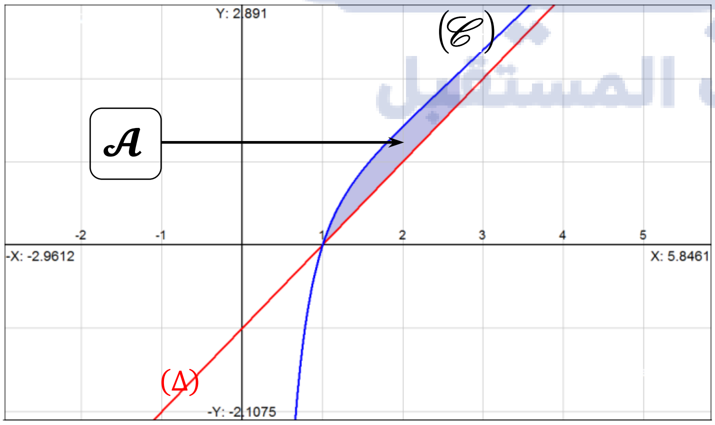
$$\mathcal{A} = \int_1^e \left|\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right|dx = \int_1^e \left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x}dx - \int_1^e \frac{1}{x^2}dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$$

$$= [\ln x]_1^e - \left[\frac{-1}{x}\right]_1^e + \left(1-\frac{2}{e}\right)$$

$$= 1-\left(\frac{-1}{e}+1\right)+\left(1-\frac{2}{e}\right) = \left(1-\frac{2}{e}\right)\ unit\acute{e}^2$$

$$= \left(1-\frac{1}{e}\right)(1\ cm)^2 = \left(1-\frac{1}{e}\right)\ cm^2$$



طريقتي YOUR WAY
جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

الإمتحـــــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريــــــــا
الدورة العــــــــادية 2011

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

مـــادة الريــــــاضيات
العلوم التجــــريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجـــية بمسلكيها
مدة الانجاز 3h - المعامل 7

التمرين الأول : (2,5 ن)

0,50 ن | 1 | أ | حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2+4x-5=0$.

1,00 ن | 1 | ب | حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln(2x)$.

1,00 ن | 2 | حل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة : $\ln x+\ln(x+1)\geq\ln(x^2+1)$.

التمرين الثاني : (3,0 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{u_n}{5+8u_n} \;;\; (\forall n\in\mathbb{N}) \\ u_0=1 \end{cases}$$

0,50 ن | 1 | بين بالترجع أن : $u_n>0$; $(\forall n\in\mathbb{N})$.

2 | نضع : $v_n=\dfrac{1}{u_n}+2$; $(\forall n\in\mathbb{N})$

1,50 ن | 2 | أ | بين أن : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 5 ثم أكتب v_n بدلالة n .

1,00 ن | 2 | ب | بين أن : $u_n=\dfrac{1}{3\times5^n-2}$; $(\forall n\in\mathbb{N})$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\infty}u_n$

التمرين الثالث : (5,0ن)

1,00 ن | 1 | حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-18z+82=0$.

2 | نعتبر ، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=9+i$ و $b=9-i$ و $c=11-i$.

1,00 ن | 2 | أ | بين أن : $\dfrac{c-b}{a-b}=-i$ ثم استنتج أن ABC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B .

0,50 ن | 2 | ب | إعط الشكل المثلثي للعدد العقدي $4(1-i)$.

1,00 ن | 2 | ج | بين أن : $(c-a)(c-b)=4(1-i)$ ثم استنتج أن : $AC\times BC=4\sqrt{2}$.

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة B و زاويته $\dfrac{3\pi}{2}$

1,50 ن | 2 | د | بين أن : $z'=-iz+10+8i$ ثم تحقق أن لحق النقطة C' صورة C بالدوران $\mathcal{R}$ هو : $(9-3i)$.

التمرين الرابع : (9,5ن)

	I			نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=(1-x)e^{x}-1$
0,50 ن	I	1	أ	بين أن : $g'(x)=-xe^{x}$; $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$.
0,75 ن	I	1	ب	بين أن الدالة g تناقصية على المجال $[0;+\infty[$ و تزايدية على $]-\infty;0]$ و تحقق أن : $g(0)=0$
0,50 ن	I	2		استنتج أن : $g(x)\leq 0$; $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$.
	II			لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=(2-x)e^{x}-x$
				و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $2\,cm$).
0,50 ن	II	1	أ	بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
0,75 ن	II	1	ب	بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم استنتج أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه .
0,75 ن	II	2	أ	بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$ (نذكر أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$).
0,25 ن	II	2	ب	بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$.
0,50 ن	II	3	أ	بين أن : $f'(x)=g(x)$; $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$.
0,25 ن	II	3	ب	أوّل هندسيا النتيجة $f'(0)=0$.
0,50 ن	II	3	ج	بين أن الدالة f تناقصية على $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .
0,50 ن	II	4		بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ و أن $\frac{3}{2}<\alpha<2$ (نقبل أن $e^{\frac{3}{2}}>3$).
0,50 ن	II	5	أ	حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x)+x=0$ و استنتج أن $(\mathscr{C})$ و (D) يتقاطعان في النقطة $A(2,-2)$.
0,25 ن	II	5	ب	أدرس إشارة $f(x)+x$ على $\mathbb{R}$.
0,25 ن	II	5	ج	استنتج أن $(\mathscr{C})$ يوجد فوق (D) على $]-\infty;2[$ و أسفل (D) على $]2;+\infty[$.
0,50 ن	II	6	أ	بين أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثيتيها هو $(0;2)$.
1,00 ن	II	6	ب	أنشئ المستقيم (D) و المنحنى $(\mathscr{C})$ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1,00 ن	II	7	أ	باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}\,dx=\left(3-\frac{4}{e}\right)$
0,25 ن	II	7	ب	استنتج بالوحدة cm^{2} مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.

YOUR WAY
وإرشاد شباب المستقبل

أجوبة امتحان الدورة العادية 2011

التمرين الأول :

1 أ

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2+4x-5=0$.

لدينا : $\Delta= 4^2-4(-5)=16+20=36$

إذن : المعادلة تقبل حلين حقيقيين x_1 و x_2 معرفين بما يلي :

$$x_1=\frac{-4-6}{2}=-5 \qquad و \qquad x_2=\frac{-4+6}{2}=1$$

1 ب

لنحل في $]0;+\infty[$ المعادلة : $\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln(2x)$

نستعمل قواعد الدالة ln نجد : $\ln(x^2+5)=\ln\big(2x(x+2)\big)$

يعني : $\ln(x^2+5)=\ln(2x^2+4x)$

أي : $e^{\ln(x^2+5)}=e^{\ln(2x^2+4x)}$

يعني : $x^2+5=2x^2+4x$

و منه : $x^2+4x-5=0$

و هذه المعادلة تقبل في $\mathbb{R}$ الحلين -5 و 1 .

بما أن : $-5\notin\ ]0;+\infty[$ و $1\in\ ]0;+\infty[$.

فإن المعادلة : $\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln(2x)$ تقبل حلا وحيدا في $]0;+\infty[$ و هو 1 .

2

لنحل في $]0;+\infty[$ المتراجحة $\ln x+\ln(x+1)\geq\ln(x^2+1)$

هذه المتراجحة تصبح : $\ln(x^2+x)\geq\ln(x^2+1)$

بما أن الدالة ln تقابل من $\mathbb{R}_*^+$ نحو $\mathbb{R}$ فإن المتراجحة تصبح :

$x^2+x\geq x^2+1$

يعني : $x\geq1$

و بالتالي : مجموعة حلول المتراجحة هي جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 1 . أو بتعبير آخر : $S=[1;+\infty[$

التمرين الثاني :

1

نعتبر العبارة (P_n) المعرفة بما يلي : $(P_n):\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})\,;\,u_n>0$

لدينا : $1>0$ إذن : $u_0=1>0$

و هذا يعني أن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 5+8u_n>5>0$

و هذا يعني أن الكميتين u_n و $(5+8u_n)$ موجبتين قطعا .

إذن $\dfrac{u_n}{5+8u_n}$ كمية موجبة قطعا .

أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \dfrac{u_n}{5+8u_n}>0$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}>0$

إذن : العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

حصلنا إذن على النتائج التالية : $\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\(P_n)\ \Rightarrow\ (P_{n+1})\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})\end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$

2 أ

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$. لدينا : $v_n=\dfrac{1}{u_n}+2$

إذن :

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=\frac{1}{u_{n+1}}+2=\frac{1}{\left(\frac{u_n}{5+8u_n}\right)}+2=\frac{5+8u_n}{u_n}+2\\&=\frac{5+10u_n}{u_n}=\frac{5}{u_n}+10=5\left(\frac{1}{u_n}+2\right)=5v_n\end{aligned}$$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ v_{n+1}=5\,v_n$

و هذا يعني أن المتتالية $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ هندسية و أساسها هو العدد 5 .

و منه فإن الحد العام v_n لهذه المتتالية يُكتب على الشكل :

$$v_n=v_0 5^{n-0}=\left(\frac{1}{u_0}+2\right)5^n=\left(\frac{1}{1}+2\right)5^n=3\times5^n$$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ v_n=3\times5^n$

2 ب

نعلم أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ v_n=\dfrac{1}{u_n}+2$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ v_n-2=\dfrac{1}{u_n}$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n=\dfrac{1}{v_n-2}$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n=\dfrac{1}{3\times5^n-2}$

نلاحظ أن التعبير 5^n عبارة عن متتالية هندسية أساسها 5 و هو عدد حقيقي أكبر من 1

إذن : $\lim\limits_{n\infty}5^n=+\infty$

و منه : $\lim\limits_{n\infty}u_n=\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{1}{3\times5^n-2}\right)=\dfrac{1}{+\infty}=0$

إذن : $\lim\limits_{n\infty}u_n=0$

التمرين الثالث :

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-18z+82=0$

لدينا : $\Delta=(-18)^2-4\times82=-4=(2i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين بما يلي :

$$z_1=\frac{18-2i}{2}=9-i \qquad و \qquad z_2=\frac{18+2i}{2}=9+i$$

2 أ

لدينا :

$$\frac{c-b}{a-b}=\frac{(11-i)-(9-i)}{(9+i)-(9-i)}=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}=\frac{1\times i}{i\times i}=-i$$

إذن : $\dfrac{c-b}{a-b}=-i$

و من هذه الكتابة الأخيرة نحصل على :

$$\begin{cases}\arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right)\equiv\arg(-i)\ [2\pi]\\\left|\dfrac{c-b}{a-b}\right|=|-i|\end{cases}$$

يعني :

$$\begin{cases}\arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi]\\\left|\dfrac{c-b}{a-b}\right|=1\end{cases}$$

YOUR WAY
وإرشاد شباب المستقبل

أي : $\begin{cases} \left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi] \\ |c-b| = |a-b| \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi] \\ BC = BA \end{cases}$

و من هذه الكتابة الأخيرة نستنتج أن ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في نفس النقطة B .

ملاحظة : إذا كان $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ نقول أن ABC مثلث قائم الزاوية مباشر . و إذا كان $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ نقول أن ABC مثلث قائم الزاوية غير مباشر .

2 ب

لدينا : $|4(1-i)| = 4\sqrt{1^2+(-1)^2} = 4\sqrt{2}$

إذن : $4(1-i) = 4\sqrt{2}e^{i\theta}$

لنبحث الآن عن العمدة θ .

و من أجل ذلك ننطلق من : $4(1-i) = 4\sqrt{2}\cos\theta + i\,4\sqrt{2}\sin\theta$

يعني : $\begin{cases} 4 = 4\sqrt{2}\cos\theta \\ -4 = 4\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} \cos\theta = \cos\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) \\ \sin\theta = \sin\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) \end{cases}$

إذن : $\theta \equiv \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

و بالتالي : $4(1-i) = 4\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$

2 ج

لدينا : $(c-a)(c-b) = (11-i-9-i)(11-i-9+i)$

و منه : $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$

يعني : $|(c-a)(c-b)| = |4(1-i)|$

يعني : $|c-a| \times |c-b| = 4|1-i|$

إذن : $|c-a| \times |c-b| = 4\sqrt{2}$

يعني : $AC \times BC = 4\sqrt{2}$

2 د

لدينا $\mathcal{R}$ دوران معرف بما يلي : $\mathcal{R}_B\left(\frac{3\pi}{2}\right) : \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$

ننطلق من المعطى : $\mathcal{R}(M) = M'$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران : $(z'-b) = e^{\frac{i3\pi}{2}}(z-b)$

يعني : $(z'-9+i) = -i(z-9+i)$

يعني : $z'-9+i = -iz+9i+1$

يعني : $z' = -iz+8i+10$

إذن الدوران $\mathcal{R}$ يصبح : $\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \longmapsto & M'(-iz+8i+10) \end{array}$

لدينا :
$$\begin{aligned} -ic+8i+10 &= -i(11-i)+8i+10 \\ &= -11i-1+8i+10 = -3i+9 = c' = aff(C') \end{aligned}$$

إذن حسب الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$ نستنتج أن : $\mathcal{R}(C) = C'$

و كذلك : $aff(C') = c' = 9-3i$

التمرين الرابع :

I 1 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $g(x) = (1-x)e^x - 1$

إذن : $g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ g'(x) = -xe^x$

I 1 ب

إذا كان $x\ \epsilon\ [0,+\infty[$ فإن : $-xe^x \leq 0$

و منه : $\forall\ x\ \epsilon\ [0;+\infty[\ ;\ g'(x) \leq 0$

و هذا يعني أن الدالة g تناقصية على $[0;+\infty[$.

إذا كان : $x\ \epsilon\ ]-\infty;0]$ فإن : $-xe^x \geq 0$

و منه : $\forall\ x\ \epsilon\ [0;+\infty[\ ;\ g'(x) \geq 0$

و هذا يعني أن الدالة g تزايدية على $]-\infty;0]$.

و لدينا : $g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 0$

I 2

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان : $x \geq 0$

فإن : $g(x) \leq g(0)$ لأن g تناقصية على $[0;+\infty[$.

و منه : $(\forall x \geq 0)\ ;\ g(x) \leq 0$

الحالة الثانية : إذا كان : $x \leq 0$

فإن : $g(x) \leq g(0)$ لأن g تزايدية على $]-\infty;0]$.

و منه : $(\forall x \leq 0)\ ;\ g(x) \leq 0$

نلاحظ في كلتا الحالتين أن : $g(x) \leq 0$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ g(x) \leq 0$

II 1 أ

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} (2-x)e^x - x = (2-\infty)e^{+\infty} - \infty \\ &= (-\infty)(+\infty) - \infty = -\infty - \infty = -\infty \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ $(\mathbf{1})$

II 1 ب

لدينا :
$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x} - 1\right)e^x - 1 \\ &= \left(\frac{2}{x} - 1\right)e^{+\infty} - 1 = (0-1)(+\infty) - 1 \\ &= (-1)(+\infty) - 1 = -\infty - 1 = -\infty \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$ $(\mathbf{2})$

نستنتج إذن من النتيجتين $(\mathbf{1})$ و $(\mathbf{2})$ أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

II 2 أ

لدينا :
$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} (2-x)e^x - x \\ &= \lim_{x\to-\infty} \left(\underbrace{2e^x}_{\boxed{0^+}} - \underbrace{xe^x}_{\boxed{0^-}} - \underbrace{x}_{\boxed{-\infty}}\right) \\ &= 2\times 0 - 0 - (-\infty) = 0 + \infty = +\infty \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$ (3)

و لدينا : $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty}(2-x)e^x$

$= \lim_{x\to-\infty} 2e^x-xe^x=0-0=0$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0}$ (4)

II 2 ب

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}-1\right)e^x-1$

$=\left(\frac{2}{-\infty}-1\right)e^{-\infty}-1=(0-1)(0)-1=-1$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1}$ (5)

من النهايات (3) و (4) و (5) نستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته : $(D): y=-1x+0$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$.

II 3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $f(x)=(2-x)e^x-x$

إذن : $f'(x)=-e^x+(2-x)e^x-1$

$=(-1+2-x)e^x-1$

$=(1-x)e^x-1$

$=g(x)$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=g(x)$

II 3 ب

النتيجة $f'(0)=0$ تعني هندسيا أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا أفقيا (موازي لمحور الأفاصيل) بجوار النقطة ذات الأفصول 0 .

II 3 ج

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=g(x)$

و نعلم حسب نتيجة السؤال I) 2) أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ g(x)\le 0$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x)\le 0$

و هذا يعني أن الدالة f تناقصية على $\mathbb{R}$.

و نضع جدول تغيرات f كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	2	↘	$-\infty$

II 4

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$.

إذن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

و منه كل عنصر من $\mathbb{R}$ يمتلك سابقا واحدا من $\mathbb{R}$ بالدالة f .

لدينا : $0\in\mathbb{R}$ إذن : $(\exists!\ \alpha\in\mathbb{R})\ ;\ f(\alpha)=0$

يعني أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ و هو العدد α .

و لدينا : $\boxed{f \text{ دالة متصلة على المجال } \left[\frac{3}{2};2\right]}$. (2)

و لدينا كذلك : $f(2)=(2-2)e^2-2=-2<0$

إذن : $\boxed{f(2)<0}$ (2)

و لدينا كذلك : $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}$

بما أن : $e^{\frac{3}{2}}>3$ فإن : $\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}>\frac{3}{2}$

و منه : $\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}>0$ أي : $\boxed{f\left(\frac{3}{2}\right)>0}$ (3)

من النتيجتين (2) و (3) نستنتج أن : $\boxed{f(2)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)<0}$ (4)

إذن من النتيجتين (1) و (4) نستنتج حسب مبرهنة القيم الوسيطية (TVI)

أن : $\exists!\ \alpha\in\left]2;\frac{3}{2}\right[\ ;\ f(\alpha)=0$

و بالتالي : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 2 و $\frac{3}{2}$

النقطة ذات الأفصول α هي نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل .

II 5 أ

المعادلة $f(x)+x=0$ تصبح : $(2-x)e^x-x+x=0$

يعني : $(2-x)e^x=0$

نعلم أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^x\neq 0$

إذن : $2-x=0$ و منه : $x=2$

إذن أفصول نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) ذو المعادلة $y=-x$

هو 2 و أرتوبها هو : $f(2)=-2$

و بالتالي : $(\mathscr{C})$ و (D) يتقاطعان في النقطة $A(2;-2)$.

II 5 ب

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x)+x=(2-x)e^x$

إذن : إشارة $f(x)+x$ تتعلق فقط بإشارة $(2-x)$

و ذلك لأن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^x>0$

إذا كان : $x=2$ فإن : $f(x)+x=0$.

إذا كان : $x>2$ فإن : $f(x)+x<0$.

إذا كان : $x<2$ فإن : $f(x)+x>0$.

II 5 ج

نستنتج من السؤال ب) أنه :

- إذا كان : $x>2$ فإن : $f(x)<$
- إذا كان : $x<2$ فإن : $f(x)>$

إذن : $(\mathscr{C})$ يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $]-\infty;2[$.

و $(\mathscr{C})$ يوجد أسفل (D) على المجال $]2;+\infty[$.

II 6 أ

لدراسة نقط الإنعطاف ندرس النقط التي تنعدم فيها المشتقة الثانية f'' .

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. و نريد أن نحل المعادلة : $f''(x)=0$

لدينا : $f''(x)=g'(x)=-xe^x$

إذن المعادلة تصبح : $-xe^x=0$

نعلم أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^0\neq 0$

إذن المعادلة تصبح : $x=0$

و منه : فالمعادلة تقبل حلا وحيدا و هو الصفر .

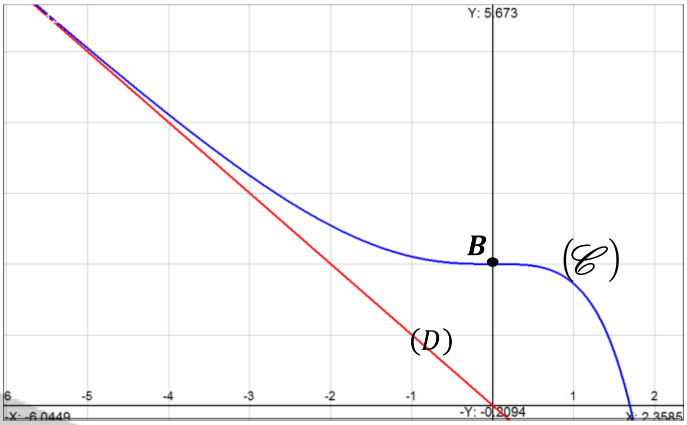
يعني أن $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف واحدة أفصولها 0 .

و أرتوبها هو $f(0)=2$

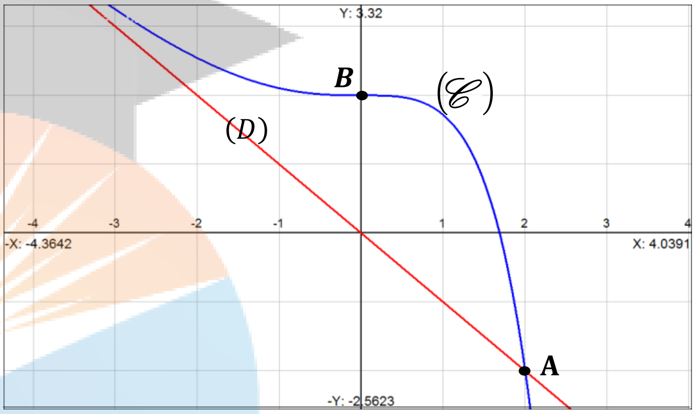
أي : $B(0;2)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C})$

طريقهم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

II 6 ب



أضفت الصورة الأولى لنرى بوضوح ما يقع بجوار $-\infty$.



II 7 أ

لدينا : $\int_{-1}^{0} \underbrace{(2-x)}_{u}\ \underbrace{e^x}_{v'}\ dx = [uv]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} u'v\,dx$

$= [(2-x)e^x]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -e^x\,dx$

$= [(2-x)e^x]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^x\,dx$

$= [(2-x)e^x]_{-1}^{0} + [e^x]_{-1}^{0}$

$= \left(2-\frac{3}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{e}\right) = \boxed{3-\frac{4}{e}}$

إذن : $\int_{-1}^{0} (2-x)\ e^x\ dx = 3-\frac{4}{e}$

II 7 ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$
و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.
نعلم أن التكامل يقيس هندسيا طول أو مساحة أو حجم .

إذن : $\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} |f(x)-(-x)|\,dx = \int_{-1}^{0} |f(x)+x|\ \ dx$

من خلال دراسة إشارة $(f(x)+x)$ حسب (II 5 ب)
نكتب : $(\forall x<2)\ ;\ f(x)+x>0$
إذن : $(\forall x<2)\ ;\ |f(x)+x| = f(x)+x$

و منه : $\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} |f(x)+x|\ \ dx = \int_{-1}^{0} (f(x)+x)\,dx$

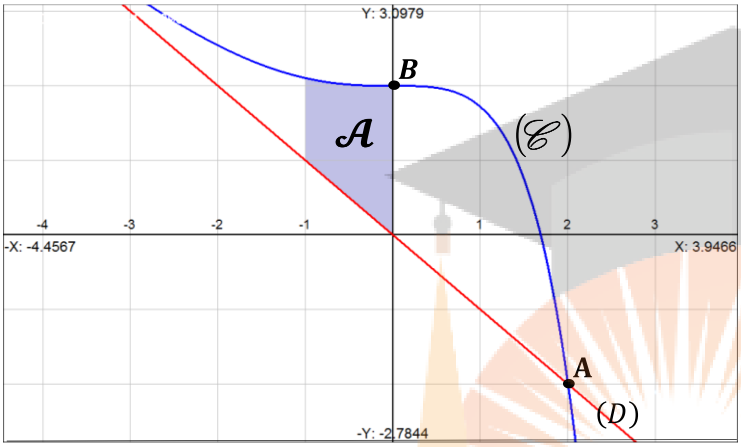
$= \left(3-\frac{4}{e}\right)\ unité^2$

إذن : $\mathcal{A} = \left(3-\frac{4}{e}\right)\ unité^2$

بما أن : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\ cm$ فإن : $l'unité = 2cm$

إذن : $(l'unité)^2 = 4\ cm^2$

و بالتالي : $\mathcal{A} = 4\left(3-\frac{4}{e}\right)\ cm^2 = \left(12-\frac{16}{e}\right) cm^2$



طريقكم YOUR WAY جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

الإمتحـــــــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريــــــــــا
الدورة الاستدراكية 2011

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

مـــادة الريـــــــــاضيات
العلوم التجــــريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجـــية بمسلكيها
مدة الانجـاز 3h ـ المعامل 7

التمرين الأول : (2,5 ن)

0,50 ن — 1 أ — حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2-2x-3=0$.

1,00 ن — 1 ب — حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $e^x-\frac{3}{e^x}-2=0$

1,00 ن — 2 — حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $e^{x+1}-e^{-x}\geq 0$.

التمرين الثاني : (4 ن)

1,00 ن — 1 — حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+18=0$.

2 — نعتبر ، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$
النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما : $a=3+3i$ و $b=3-3i$.

0,50 ن — 2 أ — أكتب على الشكل المثلثي كل من العددين العقديين a و b .

0,75 ن — 2 ب — بين أن b' لحق النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة t التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ هو 6 .

1,00 ن — 2 ج — بين أن : $\frac{b-b'}{a-b'}=i$ ثم استنتج أن المثلث ABB' متساوي الساقين و قائم الزاوية في B' .

0,75 ن — 2 د — استنتج مما سبق أن الرباعي $OAB'B$ مربع .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1}=\frac{6u_n}{1+15u_n} \ ; \ (\forall n\epsilon\mathbb{N}) \\ u_0=1 \end{cases}$$

0,50 ن — 1 أ — تحقق من أن : $\frac{u_n-\frac{1}{3}}{15u_n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{3}\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})$

0,50 ن — 1 ب — بين بالترجع أن : $\frac{1}{3}<u_n\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})$

نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $v_n=1-\frac{1}{3u_n}\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})$

1,50 ن — 2 — بين أن $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$ ثم أكتب v_n بدلالة n .

1,00 ن — 3 — بين أن : $u_n=\frac{1}{3-2\left(\frac{1}{6}\right)^n}\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})$ ثم استنتج النهاية التالية : $\lim_{n\infty} u_n$

YOUR WAY
طريقكم
جمعية للتوجيه
وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الرابع : (10 ن)

I نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $I=]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-1+\ln x$

I 1 أ بين أن : $g'(x)=\frac{x+1}{x}$; $(\forall x\epsilon I)$ — 0,50 ن

I 1 ب بين أن الدالة g تزايدية على I . — 0,50 ن

I 2 استنتج أن : $g(x)\geq 0$ على $[1;+\infty[$ و أن : $g(x)\leq 0$ على $]0;1]$ (لاحظ: $g(1)=0$) . — 1,00 ن

II لتكن f الدالة العددية المعرفة على I بما يلي : $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1\ cm$)

II 1 أ بين أن : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ و أوِّل النتيجة هندسيا . — 0,75 ن

II 1 ب بين أن : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ — 1,00 ن

(لاحظ أن $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{\ln x}{x}$; $(\forall x\epsilon I)$) .

II 1 ج استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه. — 0,50 ن

II 2 أ بين أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$; $(\forall x\epsilon I)$ — 1,00 ن

II 2 ب استنتج أن الدالة f تزايدية على المجال $[1;+\infty[$ و تناقصية على المجال $]0;1]$. — 0,50 ن

II 2 ج إعط جدول تغيرات الدالة f على I . — 0,25 ن

II 3 أنشئ $(\mathscr{C})$ (نقبل أن للمنحنى $(\mathscr{C})$ نقطة انعطاف وحيدة أفصولها محصور بين 1,5 و 2) — 1,00 ن

II 4 أ بين أن : $H:x\to\frac{(\ln x)^2}{2}$ دالة أصلية للدالة $h:x\to\frac{\ln x}{x}$ على I . — 0,50 ن

II 4 ب تحقق من أن : $\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}$ — 0,75 ن

II 4 ج باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_1^e\ln x\,dx=1$ — 1,00 ن

II 5 أ بين أن : $f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x}$; $(\forall x\epsilon I)$ — 0,25 ن

II 5 ب بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي $0{,}5\ cm^2$. — 0,50 ن

طريقكم YOUR WAY توجيه وإرشاد شباب المستقبل

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2011

التمرين الأول :

1 أ

لنحل في ℝ المعادلة : $x^2-2x-3=0$

لدينا : $\Delta=(-2)^2-4(-3)=16$

إذن : المعادلة تقبل حلين حقيقيين x_1 و x_2 :

$$x_1=\frac{2-\sqrt{16}}{2}=-1 \quad و \quad x_2=\frac{2+\sqrt{16}}{2}=3$$

1 ب

لنحل في ℝ المعادلة : $e^x-\frac{3}{e^x}-2=0$

بعد توحيد المقام نحصل على : $\frac{e^{2x}-3-2e^x}{e^x}=0$

يعني : $e^{2x}-2e^x-3=0$

نضع : $t=e^x$. إذن المعادلة تُصبح : $t^2-2t-3=0$

و نعلم حسب السؤال 1) أ) أن : حلي هذه المعادلة هما -1 و 3 .

إذن : $t=-1$ أو $t=3$

يعني : $e^x=-1$ أو $e^x=3$

نعلم أن : $e^x>0\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R})$

إذن المعادلة $e^x=-1$ لا تقبل حلولا في ℝ . و بالتالي : $e^x=3$

يعني : $\ln(e^x)=\ln 3$ أي : $x=\ln 3$

و بالتالي : المعادلة تقبل حلا وحيدا في ℝ و هو العدد الحقيقي $\ln 3$.

2

لنحل في ℝ المتراجحة : $e^{x+1}-e^{-x}\geq 0$

بعد تعميل الطرف الأيسر نحصل على: $e^{-x}(e^{2x+1}-1)\geq 0$

نلاحظ أن إشارة الطرف الأيسر تتعلق فقط بإشارة $(e^{2x+1}-1)$

و ذلك لأن : $e^{-x}>0\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R})$

لنحل أولا المعادلة $e^{2x+1}-1=0$. التي تعني : $e^{2x+1}=1$

إذن : $2x+1=\ln 1$ أي $2x+1=0$ أي $x=\frac{-1}{2}$

و بذلك نستنتج جدول الإشارة التالي :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
e^{-x}		$+$		$+$	
$e^{2x+1}-1$		$-$	0	$+$	
$e^{-x}(e^{2x+1}-1)$		$-$	0	$+$	

من خلال الجدول : $e^{-x}(e^{2x+1}-1)\geq 0\ ;\ \forall x\in\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$

إذن (S) مجموعة حلول المتراجحة هي : $S=\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$

التمرين الثاني :

1

لنحل في مجموعة الأعداد العقدية ℂ المعادلة : $z^2-6z+18=0$

لدينا : $\Delta=(-6)^2-4(18)=-36=(6i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين بما يلي :

$$z_1=\frac{6-6i}{2}=3(1-i) \quad و \quad z_2=\frac{6+6i}{2}=3(1+i)$$

2 أ

$$\begin{aligned} a=3+3i&=3(1+i)\\ &=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &=3\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b=3-3i&=3(1-i)\\ &=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}-i\sin\frac{-\pi}{4}\right)\\ &=3\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}} \end{aligned}$$

2 ب

لدينا :
$$\begin{cases} aff(A)=a=3+3i=3\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\\ aff(B)=b=3-3i=3\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}\\ aff(B')=b' \end{cases}$$

و لدينا كذلك الإزاحة t معرفة بما يلي :
$$\begin{aligned} (\mathcal{P})&\to(\mathcal{P})\\ M&\to M'=t_{\overrightarrow{OA}}(M) \end{aligned}$$

لدينا : $t_{\overrightarrow{OA}}(B)=B'$

إذن : حسب التعريف المتجهي للإزاحة نكتب : $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{OA}$

و باستعمال التعابير العقدية نكتب :

$$aff(B')-aff(B)=aff(A)-aff(O)$$

يعني : $b'-b=a$ يعني : $b'-3+3i=3+3i$

يعني : $b'=3+3i+3-3i=6$ و بالتالي : $aff(B')=6$

2 ج

لدينا :
$$\begin{aligned} \frac{b-b'}{a-b'}&=\frac{3-3i-6}{3+3i-6}=\frac{-3(i+1)}{-3(1-i)}=\frac{i+1}{1-i}\\ &=\frac{(i+1)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{1^2-i^2}=\frac{2i}{1-(-1)}=\frac{2i}{2}=i \end{aligned}$$

و بالتالي : $\frac{b-b'}{a-b'}=i$

و منه نستنتج أن :
$$\begin{cases} \left|\frac{b-b'}{a-b'}\right|=1\\ \arg\left(\frac{b-b'}{a-b'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

يعني :
$$\begin{cases} |b-b'|=|a-b'|\\ \left(\overrightarrow{B'A};\overrightarrow{B'B}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

يعني :
$$\begin{cases} B'B=B'A\\ \left(\overrightarrow{B'A};\overrightarrow{B'B}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

و من هاتين النتيجتين نستنتج أن المثلث ABB' متساوي الساقين رأسه B' و كذلك قائم الزاوية في نفس النقطة B' .

YOUR WAY
وإرشاد شباب المستقبل

2 د

لدينا :

$$\begin{cases} OA = |z_A - z_O| = |a| = \left|3\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right| = 3\sqrt{2} \\ AB' = |z_{B'} - z_A| = |6-3-3i| = |3-3i| = 3\sqrt{2} \\ B'B = |z_B - z_{B'}| = |3-3i-6| = 3\sqrt{2} \\ BO = |z_O - z_B| = |-3+3i| = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

نستنتج إذن أن : $OA = AB' = B'B = BO$

و منه فإن الرباعي $OAB'B$ مُعين لأن جميع أضلاعه متقايسة .

و بما أن الزاوية $\widehat{B'}$ زاوية قائمة حسب نتيجة السؤال ج) .

فإن الرباعي $OAB'B$ مربع لأنه معين و إحدى زواياه قائمة .

التمرين الثالث :

1 أ

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$. لدينا : $u_{n+1} = \frac{6u_n}{1+15u_n}$

إذن : $u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{6u_n}{1+15u_n} - \frac{1}{3}$

يعني : $u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{18u_n - (1+15u_n)}{3(1+15u_n)}$

يعني : $u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{3u_n - 1}{3(1+15u_n)}$

إذن : $\boxed{u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{1+15u_n}}\ (*)$

1 ب

لنبرهن على صحة العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : (\forall n\in\mathbb{N}) ; u_n > \frac{1}{3}$

لدينا : $u_0 = 1 > \frac{1}{3}$. إذن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; u_n > \frac{1}{3}$

إذن : $\left(u_n - \frac{1}{3}\right)$ و $(15u_n + 1) > 6 > 0$

و منه فإن الكمية $\frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$ موجبة قطعا لأنها خارج كميتين موجبتين قطعا

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1} > 0$

و منه حسب النتيجة $(*)$: $(\forall n\in\mathbb{N}) ; u_{n+1} - \frac{1}{3} > 0$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; u_{n+1} > \frac{1}{3}$

و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; u_n > \frac{1}{3}$

2

ليكن n عنصرا من المجموعة $\mathbb{N}$. لدينا :

$$v_{n+1} = 1 - \frac{1}{3u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1+15u_n}{6u_n}\right) = 1 - \frac{1+15u_n}{18u_n}$$

$$= \frac{18 - (1+15u_n)}{18u_n} = \frac{3u_n - 1}{18u_n} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{6u_n}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{u_n - \frac{1}{3}}{u_n}\right) = \frac{1}{6}v_n$$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; v_{n+1} = \frac{1}{6}v_n$

إذن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$.

و منه فإن الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ يُكتب على الشكل التالي :

$$(\forall n\in\mathbb{N}) ; v_n = v_0\left(\frac{1}{6}\right)^{n-0}$$

لدينا : $v_0 = 1 - \frac{1}{3u_0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n$

3

لدينا حسب السؤال 2) : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n$

و نعلم أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; 1 - \frac{1}{3u_n} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; 1 - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{3u_n}$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N}) ; u_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$ و هو عدد حقيقي أصغر من 1 .

إذن : $\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$

و منه : $\lim_{n\infty} u_n = \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}\right) = \frac{1}{3 - 2\times 0} = \frac{1}{3}$

و بالتالي : $\lim_{n\infty}(u_n) = \frac{1}{3}$

التمرين الرابع :

I 1 أ

ليكن x عنصرا من المجال $I =]0;+\infty[$.

لدينا : $g(x) = x - 1 + \ln x$

إذن : $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

إذن : $(\forall x\in I) ; g'(x) = \frac{x+1}{x}$

I 1 ب

ليكن x عنصرا من المجال I . إذن : $x > 0$

و منه : $x + 1 > 1 > 0$

إذن : $(\forall x\in I) ; \frac{x+1}{x} > 0$

يعني : $(\forall x\in I) ; g'(x) > 0$

أي أن الدالة g تزايدية قطعا على المجال I .

I 2

ليكن x عنصرا من المجال $[1;+\infty[$. إذن : $x \geq 1$

و منه : $g(x) \geq g(1)$ لأن g دالة تزايدية قطعا على I

و لدينا : $g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$

إذن : $\forall\, x \,\epsilon\, [1;+\infty[\ ;\ g(x) \geq 0$

ليكن x عنصرا من المجال $]0;1]$. إذن : $x \leq 1$

و منه : $g(x) \leq g(1)$ لأن g دالة تزايدية على I .

و لدينا : $g(1) = 0$

إذن : $\forall\, x \,\epsilon\,]0;1]\ ;\ g(x) \leq 0$

II 1 أ

ليكن x عنصرا من المجال I . لدينا : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$

إذن :
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x = \left(1-\frac{1}{0^+}\right)(-\infty)$$
$$= (1-\infty)(-\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$$

إذن : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ و تأويلها الهندسي هو أن المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (محور الأراتيب) مقارب عمودي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار الصفر على اليمين.

II 1 ب

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x$$
$$= \left(1-\frac{1}{+\infty}\right)(+\infty) = (1-0)(+\infty) = +\infty$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ $\mathbf{(1)}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\underset{\underset{0}{\searrow}}{\frac{\ln x}{\cancel{x}_{+\infty}}}$$
$$= \left(1-\frac{1}{+\infty}\right)(0) = (1-0)(0) = 0$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0}$ $\mathbf{(2)}$

II 1 ج

من النهايتين $\mathbf{(1)}$ و $\mathbf{(2)}$ نستنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

II 2 أ

ليكن x عنصرا من المجال I . لدينا : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$

إذن :
$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)'\ln x + (\ln x)'\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
$$= \left(\frac{x-(x-1)}{x^2}\right)\ln x + \frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
$$= \frac{\ln x + x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

II 2 ب

ليكن x عنصرا من المجال $[1;+\infty[$.

إذن حسب نتيجة السؤال I 2) : $g(x) \geq 0$

يعني : $\frac{g(x)}{x^2} \geq 0$ (لأن : $x > 0$)

و منه : $\forall\, x \,\epsilon\, [1;+\infty[\ ;\ f'(x) \geq 0$

يعني أن الدالة تزايدية على المجال $[1;+\infty[$

ليكن x عنصرا من المجال $]0;1]$.

إذن حسب نتيجة السؤال I 2) : $g(x) \leq 0$

يعني : $\frac{g(x)}{x^2} \leq 0$ (لأن : $x > 0$)

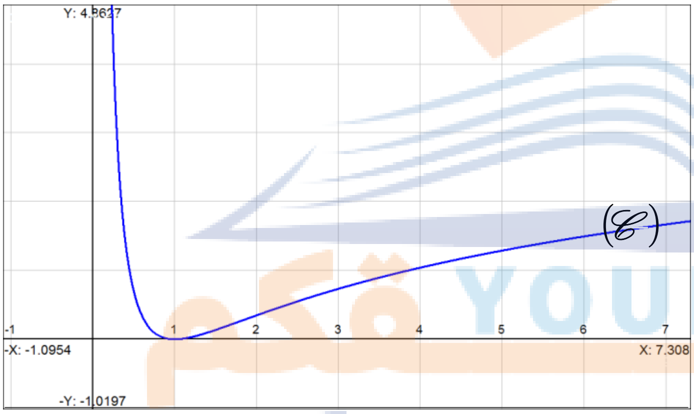
و منه : $\forall\, x \,\epsilon\,]0;1]\ ;\ f'(x) \leq 0$

يعني أن الدالة f تناقصية على المجال $]0;1]$

II 2 ج

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

II 3



II 4 أ

ليكن x عنصرا من المجال I . لدينا : $H(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$

إذن : $H'(x) = \frac{2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{2} = \frac{\ln x}{x} = h(x)$

إذن الدالة H دالة أصلية للدالة h على المجال I .

II 4 ب

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

YOUR WAY
جمعية توجيه وإرشاد شباب المستقبل

II 4 ج

$$\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\ln x}_{v}\,dx = [uv]_1^e - \int_1^e uv'dx$$

$$= [x\ln x]_1^e - \int_1^e \left(x\cdot\frac{1}{x}\right)dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1\,dx$$

$$= [x\ln x]_1^e - [x]_1^e = [x\ln x - x]_1^e$$

$$= (e\ln e - e) - (1\ln 1 - 1) = 0 - (-1) = 1$$

II 5 أ

ليكن x عنصرا من المجال I . لدينا :

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x = \left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x = \ln x - \frac{\ln x}{x}$$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x) = \ln x - \dfrac{\ln x}{x}$

II 5 ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$.

نعلم أن التكامل يقيس دائما طول أو مساحة أو حجم .

إذن : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^e |f(x)|\,dx$

نلاحظ حسب جدول تغيرات الدالة f أن 0 قيمة دنوية للدالة f على I .

يعني : $(\forall x\epsilon I)\ ;\ f(x) \geq 0$

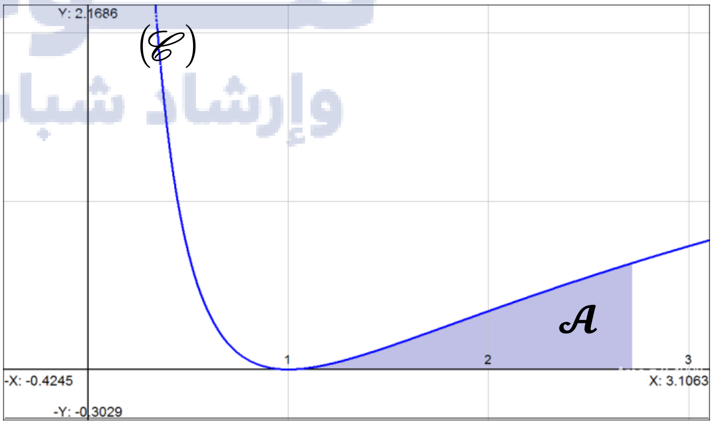
و منه : $(\forall x\epsilon I)\ ;\ |f(x)| = f(x)$

إذن : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \left(\ln x - \frac{\ln x}{x}\right)dx$

$$= \int_1^e \ln x\,dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(unit\acute{e})^2$$

$$= \frac{1}{2}(1\,cm)^2 = 0{,}5\,cm^2$$



YOUR WAY
طريقكم
جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(1,1,-1)$ و $B(0,1,-2)$ و $C(3,2,1)$ و الفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$

1 — بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,0,1)$ و أن شعاعها يساوي $\sqrt{3}$. — 0,50 ن

2 أ — بين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ و تحقق من أن : $x-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) — 0,75 ن

2 ب — تحقق من أن : $d\big(\Omega\,,(ABC)\big)=\sqrt{2}$ ثم بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها 1 . — 1,00 ن

3 — ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω العمودي على المستوى (ABC) .

3 أ — بين أن : $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \qquad ; \quad (t\epsilon\mathbb{R}) \\ z=1-t \end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) . — 0,25 ن

3 ب — بين أن مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) هو $(2,0,0)$. — 0,25 ن

3 ج — استنتج مركز الدائرة (Γ) . — 0,25 ن

التمرين الثاني : (3 ن)

1 — حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-12z+61=0$ — 0,75 ن

2 — نعتبر المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي : a و b و c بحيث : $a=6-5i$ و $b=4-2i$ و $c=2+i$.

2 أ — أحسب $\frac{a-c}{b-c}$ و استنتج أن النقط A و B و C مستقيمية . — 0,50 ن

نعتبر الإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ حيث لحق $\vec{u}$ هو $(1+5i)$

2 ب — تحقق أن لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T هو $d=3+6$. — 0,50 ن

2 ج — بين أن : $\frac{d-c}{b-c}=-1+i$ و أن : $\frac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $-1+i$ — 0,75 ن

2 د — استنتج قياسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)$. — 0,50 ن

التمرين الثالث : (3 ن)

يحتوي كيس على ثماني بيدقات : بيدقة واحدة تحمل العدد 0 و خمس بيدقات تحمل العدد 1 و بيدقتان تحملان العدد 2 (لا يمكن التمييز بينها باللمس) .

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث بيدقات من الكيس و نعتبر الأحداث التالية :

A: " الحصول على ثلاث بيدقات تحمل أعدادا مختلفة مثنى مثنى " .

B: " مجموع الأعداد التي تحملها البيدقات المسحوبة يساوي 5 "

C: " مجموع الأعداد التي تحملها البيدقات المسحوبة يساوي 4 " .

بين أن : $p(A)=\frac{5}{28}$ و $p(B)=\frac{5}{56}$ و $p(C)=\frac{3}{8}$ — 3,00 ن

التمرين الرابع : (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} \;\; ; \;\; (\forall n\epsilon\mathbb{N}) \\ u_0 = 11 \end{cases}$$

0,25 ن		1		تحقق من أن : $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$
0,50 ن		2	أ	بين بالترجع أن : $u_n < 12$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$
0,50 ن		2	ب	بين أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا .
0,25 ن		2	ج	استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متقاربة.
		3		لتكن $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المتتالية العددية بحيث : $v_n = u_n - 12$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$.
0,75 ن		3	أ	بين أن المتتالية $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{10}{11}$ ثم أكتب v_n بدلالة n .
0,75 ن		3	ب	بين أن : $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$ ثم أحسب النهاية $\lim_{n\infty} u_n$

التمرين الخامس : (8 ن)

	I			لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2\ln x$
0,75 ن	I	1		بين أن : $(x^2 - 1)$ و $2x^2\ln x$ لهما نفس الإشارة على $]0;1[$. ثم استنتج أن : $\forall\, x\,\epsilon\,]0;1]$; $g(x) \leq 0$
0,75 ن	I	2		بين أن $(x^2 - 1)$ و $2x^2\ln x$ لهما نفس الإشارة على $]1;+\infty[$ ثم استنتج أن : $\forall\, x\,\epsilon\, [1;+\infty[$; $g(x) \geq 0$
	II			نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = (x^2 - 1)\ln x$ و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (الوحدة $3\ cm^2$)
0,50 ن	II	1	أ	بين أن : $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ و أوِّل النتيجة هندسيا .
1,00 ن	II	1	ب	أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ و استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه .
1,25 ن	II	2	أ	بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$; $\forall\, x\,\epsilon\,]0;+\infty[$ (و أوِّل هندسيا النتيجة $f'(1) = 0$).
0,50 ن	II	2	ب	استنتج أن الدالة f تناقصية على المجال $]0;1]$ و تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.
0,50 ن	II	2	ج	إعط جدول تغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$ ثم بين أن : $f(x) \geq 0$; $\forall\, x\,\epsilon\,]0;+\infty[$.
1,00 ن	II	3		أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
0,50 ن	II	4	أ	بين أن : $u : x \to \frac{x^3}{3} - x$ دالة أصلية للدالة $v : x \to x^2 - 1$ على $\mathbb{R}$.
1,00 ن	II	4	ب	باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن : $\int_1^2 (x^2 - 1)\ln x\, dx = \frac{2}{9}(1 + 3\ln 2)$
0,25 ن	II	4	ج	أحسب بـ cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$.

أجوبة امتحان الدورة العادية 2012

التمرين الأول :

1

لدينا $(\mathcal{S})$ فلكة مُعرفة بمعادلتها الديكارتية التالية :

$$(\mathcal{S}) :\ x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$$

يعني : $(\mathcal{S}) :\ (x^2-2x)+(y^2)+(z^2-2z)-1=0$

يعني : $(\mathcal{S}) :\ (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2-1=2$

يعني : $(\mathcal{S}) :\ (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$

إذن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1;0;1)$ و شعاعها $R=\sqrt{3}$.

2 ب

لدينا : $\begin{cases} A(1;1;-1) \\ B(0;1;-2) \\ C(3;2;1) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(-1;0;-1) \\ \overrightarrow{AC}(2;1;2) \end{cases}$

و منه :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} \\ &= 1\vec{i}-0\vec{j}-1\vec{k}=\vec{i}-\vec{k} \end{aligned}$$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .

إذن المتجهتان $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ و $\overrightarrow{AM}$ متعامدتان .

يعني : $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$ أي : $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=0$

يعني : $1(x-1)+0(y-1)-1(z+1)=0$

يعني : $x-z-2=0$

و هذه الكتابة الأخيرة هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

2 ب

لدينا : $\Omega(1;0;1)$ و $(ABC) : x-z-2=0$

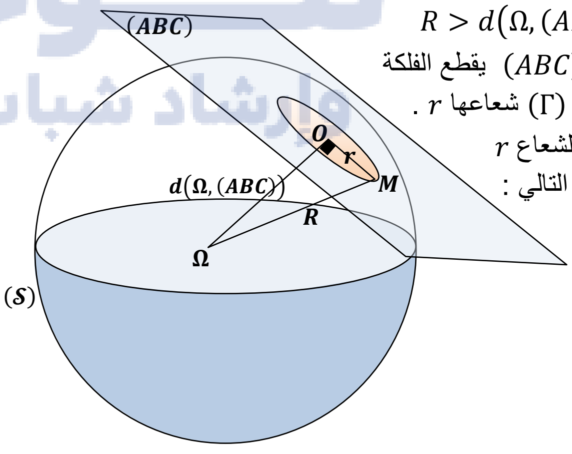
إذن : $d\left(\Omega,(ABC)\right)=\dfrac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

نعلم أن شعاع الفلكة $(\mathcal{S})$ هو $R=\sqrt{3}$. و نلاحظ أن : $\sqrt{3}>\sqrt{2}$

إذن : $R>d\left(\Omega,(ABC)\right)$

إذن المستوى (ABC) يقطع الفلكة $(\mathcal{S})$ وفق دائرة (Γ) شعاعها r .

و لتحديد قيمة الشعاع r نستعين بالشكل التالي :



لدينا المثلث $OM\Omega$ قائم الزاوية في النقطة O .

لأن $d\left(\Omega,(ABC)\right)$ هي أصغر مسافة بين نقط (ABC) و النقطة Ω .

و نحصل على هذه المسافة عندما يتحقق لدينا التعامد .

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة : $M\Omega^2=O\Omega^2+OM^2$

يعني : $R^2=\left(d\left(\Omega,(ABC)\right)\right)^2+r^2$ يعني : $\sqrt{3}^2=\sqrt{2}^2+r^2$

يعني : $3=2+r^2$ أي : $r=1$

3 أ

ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω و العمودي على المستوى (ABC) .

و لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (Δ) .

بما أن : $M\epsilon(\Delta)$ و $\Omega\epsilon(\Delta)$.

فإن : $\overrightarrow{\Omega M}$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) .

و بما أن : $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

و (Δ) عمودي على (ABC) .

فإن المتجهتان $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ مستقيميتان .

يعني : $\overrightarrow{\Omega M}=t\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$; $(\exists t\epsilon\mathbb{R})$ يعني : $\begin{cases} x-1=t \\ y-0=0t \\ z-1=-t \end{cases}$

يعني : $(\Delta) : \begin{cases} x=t+1 \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R})$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

3 ب

لتكن $H(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) .

لدينا : $\begin{cases} (\Delta) : \begin{cases} x=t+1 \\ y=0 \qquad ;\ (t\epsilon\mathbb{R}) \\ z=1-t \end{cases} \\ (ABC) : x-z-2=0 \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \alpha=t+1 \\ \beta=0 \\ \gamma=1-t \\ \alpha-\gamma-2=0 \end{cases}$

نعوض α و γ بِقيَمها في آخر معادلة : $(t+1)-(1-t)-2=0$

يعني : $2t-2=0$ يعني : $t=1$

نعوض t بالقيمة 1 لإيجاد α و γ نجد : $\begin{cases} \alpha=1+1=2 \\ \beta=0 \\ \gamma=1-1=0 \end{cases}$

و بالتالي : $(2;0;0)$ هو مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) .

3 ج

تذكير : إذا كان (P) مستوى يقطع فلكة $(\mathcal{S})$ مركزها Ω وفق دائرة (Γ) مركزها O فإن : $(P)\perp(\Omega O)$ (إنتهى التذكير)

لتكن O مركز الدائرة (Γ) .

لدينا (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق الدائرة (Γ) . إذن : $\boxed{(\Omega O)\perp(ABC)}$ $\mathbf{(1)}$

و لدينا : $\Omega H=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}=d\left(\Omega,(ABC)\right)$

إذن : $\boxed{(\Omega H)\perp(\mathrm{ABC})}$ $\mathbf{(2)}$

من $\mathbf{(1)}$ و $\mathbf{(2)}$ نستنتج أن : $(\Omega H)\parallel(\Omega O)$

و منه (ΩO) و (ΩH) منطبقان لأنهما متوازيان و يشتركان في نقطة واحدة .

و منه : $H=O$ لأن $O\in(ABC)$ و $H\in(ABC)$.

و بالتالي H هي مركز الدائرة (Γ) .

التمرين الثاني :

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 12z + 61 = 0$

لدينا : $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 61 = -100 = (10i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين كما يلي :

$$z_1 = \frac{12 - 10i}{2} = 6 - 5i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{12 + 10i}{2} = 6 + 5i$$

2 أ

لدينا : $\begin{cases} aff(A) = a = 6 - 5i \\ aff(B) = b = 4 - 2i \\ aff(C) = c = 2 + i \end{cases}$

إذن : $\frac{a - c}{b - c} = \frac{4 - 6i}{2 - 3i} = \frac{2(2 - 3i)}{(2 - 3i)} = 2 \epsilon \mathbb{R}$

إذن : $\frac{a - c}{b - c} = 2 \epsilon \mathbb{R}$

يعني : $(a - c) = 2(b - c)$ يعني : $\overrightarrow{CA} = 2\,\overrightarrow{CB}$

إذن النقط A و B و C نقط مستقيمية .

و يمكن كذلك أن نجيب بالطريقة التالية :

لدينا : $\frac{a - c}{b - c} = 2 \epsilon \mathbb{R}$ إذن : $\arg\left(\frac{a - c}{b - c}\right) \equiv 0\ [2\pi]$

يعني : $\left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}\right) \equiv 0 \ \equiv [2\pi]$

إذن النقط A و B و C نقط مستقيمية .

2 ب

لدينا : T إزاحة معرفة بما يلي : $\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M & \longmapsto & T_{\vec{u}}(M) \end{array}$

نضع : $d = aff(D)$. و ننطلق من الكتابة : $T_{\vec{u}}(C) = D$.

إذن : حسب التعريف المتجهي للإزاحة : $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$

و منه باستعمال الأعداد العقدية : $aff\left(\overrightarrow{CD}\right) = aff(\vec{u})$.

يعني : $(d - c) = (1 + 5i)$

يعني : $d = 1 + 5i + c = 1 + 5i + 2 + i = 3 + 6i$

إذن : $d = 3 + 6i$

2 ج

لدينا : $\frac{d - c}{b - c} = \frac{(3 + 6i) - (2 + i)}{(4 - 2i) - (2 + i)} = \left(\frac{1 + 5i}{2 - 3i}\right) = \frac{-13 + 13i}{2^2 - (3i)^2}$

$$= \frac{13(-1 + i)}{13} = -1 + i$$

و بالتالي : $\frac{d - c}{b - c} = -1 + i$

لنبين الآن أن $\frac{3}{4}$ عمدة للعدد العقدي $(-1 + i)$.

لدينا :

$$\begin{aligned} e^{\frac{i3\pi}{4}} &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i) \end{aligned}$$

إذن : $e^{\frac{i3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$

و منه : $\arg\left(e^{\frac{i3\pi}{4}}\right) \equiv \arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)\right)\ [2\pi]$

يعني : $\frac{3\pi}{4} \equiv \arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arg(-1 + i)\ \ [2\pi]$

يعني : $\frac{3\pi}{4} \equiv 0 + \arg(-1 + i)\ \ [2\pi]$

و بالتالي : $\arg(-1 + i) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

يعني أن : $\frac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $(-1 + i)$.

2 د

لدينا : $\frac{d - c}{b - c} = -1 + i$

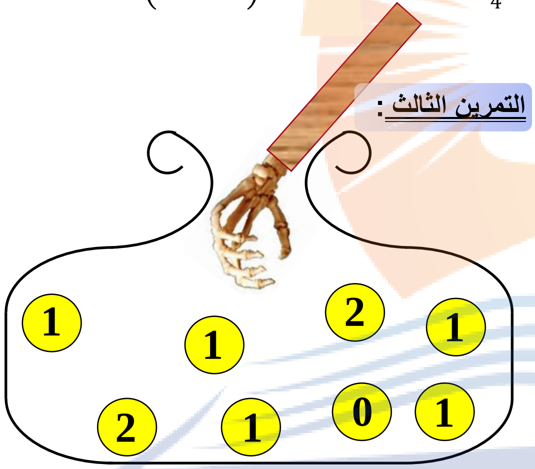
إذن : $\arg\left(\frac{d - c}{b - c}\right) \equiv \arg(-1 + i)\ \ [2\pi]$

يعني : $\arg\left(\frac{d - c}{b - c}\right) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

أي : $\left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}\right) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

إذن نختار $\frac{3\pi}{4}$ قياسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}\right)$.

التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث بيدقات من كيس يحتوي على 8 بيدقات فإن هذه التجربة العشوائية تحتمل C_8^3 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_8^3 = 56$

بحيث : Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

لدينا : $A = \{$ الحصول على ثلاث كرات تحمل أعدادا مختلفة مثنى مثنى $\}$

$$p\begin{pmatrix}\text{الحصول على} \\ \text{ثلاث بيدقات تحمل} \\ \text{أعدادا مختلفة} \\ \text{مثنى مثنى}\end{pmatrix} = p\begin{pmatrix}\text{الحصول} & & \text{الحصول على} & & \text{الحصول} \\ \text{على كرة} & \text{و} & \text{كرة ثانية} & \text{و} & \text{على كرة} \\ \text{ثالثة تحمل 2} & & \text{تحمل 1} & & \text{تحمل 0}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{card\begin{pmatrix}\text{الحصول} & & \text{الحصول على} & & \text{الحصول} \\ \text{على كرة} & \text{و} & \text{كرة ثانية} & \text{و} & \text{على كرة} \\ \text{ثالثة تحمل 2} & & \text{تحمل 1} & & \text{تحمل 0}\end{pmatrix}}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{C_1^1 \times C_5^1 \times C_2^1}{56} = \frac{1 \times 5 \times 2}{56} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

إذن : $\boxed{p(A) = \frac{5}{28}}$

لدينا : $B = \{$ مجموع الأعداد التي تحملها البيدقات المسحوبة يساوي 5 $\}$

لدينا : $\left\| \begin{array}{l} 5 = 0+1+4 \\ 5 = 0+2+3 \\ 5 = 1+1+3 \\ 5 = 1+2+2 \end{array}\right.$

بما أن الكيس لا يضم أية بيدقة تحمل العددين 3 و 4 .

فإن : الحالة الوحيدة التي يتحقق فيها الحدث B هي : $5 = 1 + 2 + 2$

إذن : $$p\left(\begin{array}{c}\text{مجموع الأعداد}\\ \text{التي تحملها}\\ \text{البيدقات المسحوبة}\\ \text{يساوي 5}\end{array}\right) = p\left(\text{بيدقتان تحملان العدد 2} \quad \text{و} \quad \text{بيدقة تحمل العدد 1}\right)$$

$$= \frac{card\left(\begin{array}{c}\text{بيدقتان}\\ \text{تحملان}\\ \text{العدد 2}\end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{c}\text{بيدقة}\\ \text{تحمل}\\ \text{العدد 1}\end{array}\right)}{card(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_2^2}{56} = \frac{5 \times 1}{56} = \frac{5}{56}$$

لدينا : $C = \{$ مجموع الأعداد التي تحملها البيدقات المسحوبة يساوي 4 $\}$

لدينا : $\left\| \begin{array}{l} 4 = 1+1+2 \\ 4 = 0+2+2 \end{array}\right.$

إذن : $$p(C) = p\left(\begin{array}{c}\text{بيدقتان تحملان العدد}\\ \text{2 و بيدقة واحدة}\\ \text{تحمل العدد 0}\end{array} \quad \text{أو} \quad \begin{array}{c}\text{بيدقتان تحملان العدد}\\ \text{1 و بيدقة واحدة}\\ \text{تحمل العدد 2}\end{array}\right)$$

$$= p\left(\begin{array}{c}\text{بيدقتان تحملان العدد}\\ \text{1 و بيدقة واحدة}\\ \text{تحمل العدد 2}\end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c}\text{بيدقتان تحملان العدد}\\ \text{2 و بيدقة واحدة}\\ \text{تحمل العدد 0}\end{array}\right)$$

$$= \frac{card\left(\begin{array}{c}\text{بيدقتان تحملان العدد}\\ \text{1 و بيدقة واحدة}\\ \text{تحمل العدد 2}\end{array}\right)}{56} + \frac{card\left(\begin{array}{c}\text{بيدقتان تحملان العدد}\\ \text{2 و بيدقة واحدة}\\ \text{تحمل العدد 0}\end{array}\right)}{56}$$

$$= \frac{C_5^2 \times C_2^1}{56} + \frac{C_2^2 \times C_1^1}{56} = \frac{10 \times 2}{56} + \frac{1}{56} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$$

التمرين الرابع :

1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا . لدينا : $u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$

إذن : $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} - 12 = \frac{10}{11}u_n - \frac{120}{11}$

$= \frac{10}{11}(u_n - 12)$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$

2 أ

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n < 12$

لدينا : $u_0 = 11 < 12$. إذن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n < 12$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n - 12 < 0$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \frac{10}{11}(u_n - 12) < 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} - 12 < 0$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} < 12$

إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

و بالتالي : حسب مبدأ الترجع : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n < 12$

2 ب

سوف نُوَظِّفُ نتيجة السؤال 1) في إحدى مراحل الجواب .

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n < 12$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ (u_{n+1} - 12) < 0$

يعني أن الكمية $(u_n - 12)$ سالبة كيفما كان n من $\mathbb{N}$.

نعلم أن : $10 < 11$ إذن : $\frac{10}{11} < 1$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد السالب $(u_n - 12)$ نحصل على :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \frac{10}{11}(u_n - 12) > 1(u_n - 12)$$

نستعمل نتيجة السؤال 1) نحصل على :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} - 12 > u_n - 12$$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} > u_n$

إذن : المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا .

2 ج

بما أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية و مكبورة بالعدد 12

(لأن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n < 12$)

فإن هذه المتتالية متقاربة .

3 أ

نعلم حسب السؤال 1) أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$

إذن حسب تعريف المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نجد : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_{n+1} = \frac{10}{11}v_n$

إذن : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{10}{11}$

و بالتالي حدها العام v_n يُكتَب على الشكل : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n = v_0\left(\frac{10}{11}\right)^{n-0}$

و لدينا : $v_0 = u_0 - 12 = 11 - 12 = -1$

إذن : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n}\ (*)$

3 ب

لدينا حسب تعريف المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n = u_n - 12$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n = 12 + v_n$

و منه باستعمال العلاقة $(*)$ نحصل على : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$

نلاحظ أن $\left(\frac{10}{11}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{10}{11}$ و هو عدد موجب أصغر من 1

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{10}{11}\right)^n = 0$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \lim\limits_{n\infty}\left(12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n\right) = 12 - 0 = 12$

التمرين الخامس :

I 1

ليكن x عنصرا من المجال $]0;1[$. إذن : $0 < x < 1$

يعني : $(x-1) < 0$ و $(x+1) > 0$ و منه : $(x+1)(x-1) < 0$

يعني : $\boxed{(x^2 - 1) < 0}\ \mathbf{(1)}$

و لدينا كذلك : $0 < x < 1$ إذن : $\ln x < 0$ يعني : $\boxed{2x^2 \ln x < 0}\ \mathbf{(2)}$

من $\mathbf{(1)}$ و $\mathbf{(2)}$ نستنتج أن الكميتان $(x^2 - 1)$ و $2x^2 \ln x$ سالبتان على المجال $]0;1[$.

و منه $(x) < 0$ لأن $g(x)$ عبارة عن مجموع كميتين سالبتين .

و بما أن : $g(1) = 0$ فإن : $\forall\ x \in\ ]0;1]\ ;\ g(x) \le 0$

طريقتكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

I 2

ليكن x عنصرا من المجال $]1;+\infty[$. يعني : $x > 1$

و منه : $\boxed{2x^2 \ln x > 0}$ $(\mathbf{1})$

و لدينا كذلك $x > 1$ إذن : $(x-1) > 0$ و $(x+1) > 0$.

و منه : $(x+1)(x-1) > 0$ يعني : $\boxed{(x^2-1) > 0}$ $(\mathbf{2})$

من ($\mathbf{1}$) و ($\mathbf{2}$) نستنتج أن الكميتان (x^2-1) و $2x^2 \ln x$ موجبتين على المجال $]1;+\infty[$

و منه : $g(x) > 0$ لأن $g(x)$ عبارة عن مجموع كميتين موجبتين قطعا .

و بما أن : $g(1) = 0$ فإن : $\forall\, x \in [1;+\infty[\ ;\ g(x) \geq 0$

II 1 أ

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (x^2-1)\ln x = (0-1)(-\infty) = +\infty$$

إذن : $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

و تأويل هذه النهاية مبيانيا هو : " المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (يعني محور الأراتيب) مقارب عمودي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار الصفر "

II 1 ب

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2-1)\ln x = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ $(\mathbf{1})$

و لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-1}{x}\right)\ln x = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right)(\ln x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$ $(\mathbf{2})$

و من النهايتين $(\mathbf{1})$ و $(\mathbf{2})$ نستنتج أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

II 2 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا : $f(x) = (x^2-1)\ln x$

إذن :

$$f'(x) = (x^2-1)' \ln x + (\ln x)'(x^2-1) = 2x\ln x + \frac{x^2-1}{x} = \frac{2x^2\ln x + x^2 - 1}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

إذن : $\forall\, x \in]0;+\infty[\ ;\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

نُعَوض x بالعدد 1 نحصل على : $f'(1) = \dfrac{g(1)}{1} = 0$

إذن $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا أفقيا في النقطة ذات الأفصول 1 .

II 2 ب

لدينا حسب نتيجة السؤال I 1) : $\forall\, x \in]0;1]\ ;\ g(x) \leq 0$

إذن : $\forall\, x \in]0;1]\ ;\ \frac{g(x)}{x} \leq 0$

يعني : $\forall\, x \in]0;1]\ ;\ f'(x) \leq 0$

يعني أن الدالة f تناقصية على المجال $]0;1]$.

و نعلم كذلك حسب السؤال I 2) أن : $\forall\, x \in [1;+\infty[\ ;\ g(x) \geq 0$

يعني : $\forall\, x \in [1;+\infty[\ ;\ \frac{g(x)}{x} \geq 0$

يعني : $\forall\, x \in [1;+\infty[\ ;\ f'(x) \geq 0$

يعني أن الدالة f تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.

II 2 ج

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

ليكن x عنصرا من المجال $]0;1]$. إذن : $x \leq 1$

و منه : $f(x) \geq f(1)$ (لأن f تناقصية على المجال $]0,1]$).

إذن : $\boxed{\forall\, x \in]0;1]\ ;\ f(x) \geq 0}$ $(\mathbf{1})$

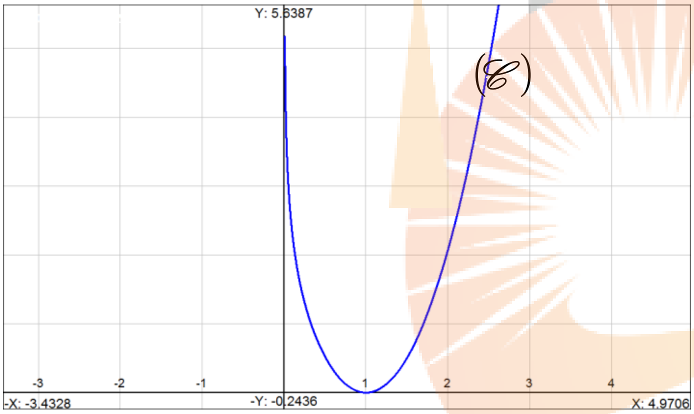
ليكن x عنصرا من المجال $[1;+\infty[$. إذن : $x \geq 1$

و منه : $f(x) \geq f(1)$ (لأن f تزايدية على المجال $[1;+\infty[$).

إذن : $\boxed{\forall\, x \in [1;+\infty[\ ;\ f(x) \geq 0}$ $(\mathbf{2})$

من النتيجتين ($\mathbf{1}$) و ($\mathbf{2}$) نستنتج أن : $\forall\, x \in]0;+\infty[\ ;\ f(x) \geq$

II 3



II 4 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $u(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$

إذن : $u'(x) = \dfrac{3x^2}{3} - 1 = x^2 - 1 = v(x)$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ u'(x) = v(x)$

يعني أن الدالة u دالة أصلية للدالة v على $\mathbb{R}$.

II 4 ب

$$\int_1^2 \underbrace{(x^2-1)}_{u'} \underbrace{\ln x}_{h}\, dx = [u(x)\cdot h(x)]_1^2 - \int_1^2 u(x)\cdot h'(x)\, dx$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\cdot\frac{1}{x}\, dx$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 2\right)\ln 2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - 1\right) dx$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 2\right)\ln 2 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + [x]_1^2$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + (2-1)$$

$$= \frac{2\ln 2}{3} - \frac{7}{9} + 1 = \frac{2}{9}(1 + 3\ln 2)$$

طريقهم
جمعية توجيه وإرشاد شباب المستقبل
YOUR WAY

II 4 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين $x = 1$ و $x = 2$.

نعلم أن التكامل يقيس هندسيا طولا أو مساحة أو حجم .

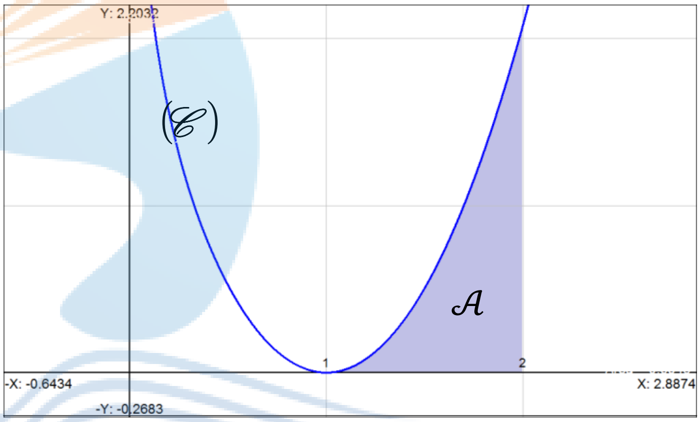
إذن : $\mathcal{A} = \int_1^2 |f(x)|\,dx$

و نعلم أن : $\forall\, x\, \epsilon\ ]0;+\infty[\ ;\ f(x) \geq 0$

إذن : $\forall\, x\, \epsilon\ ]0;+\infty[\ ;\ |f(x)| = f(x)$

و منه :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (x^2-1)\ln x\,dx &= \frac{2}{9}(1+3\ln 2)(unit\acute{e})^2 \\ &= \frac{2}{9}(1+3\ln 2)(3\,cm)^2 \\ &= \frac{2}{9}(1+3\ln 2)\times 9\,cm^2 \\ &= 2(1+3\ln 2)\,cm^2 \\ &\approx 6{,}16\,cm^2\end{aligned}$$



YOUR WAY
طريقكم
جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الإمتحـــــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريـــــــا
الدورة الاستدراكية 2012

مــادة الريـــــاضيات
العلوم التجـــريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجـيــة بمسلكيها
مدة الانجاز **3h** ـ المعامل **7**

التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط : $A(-3,0,0)$ و $B(0,0,-3)$ و $C(0,2,-2)$ و الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ و شعاعها هو 3

1,25 ن — **1** أ) بين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=6\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$
ثم استنتج أن $2x-y+2z+6=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

0,75 ن — **1** ب) أحسب $d\big(\Omega,(ABC)\big)$ و استنتج أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) .

2 ليكن (D) المستقيم المار من Ω و العمودي على (ABC) .

0,50 ن — **2** أ) بين أن : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \quad ; \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=1+2t \end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (D) .

0,50 ن — **2** ب) بين أن مثلوث إحداثيات H نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S) هو $(-1,2,-1)$.

التمرين الثاني : (3 ن)

1 نعتبر ، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c بحيث : $a=(2-i)$ و $b=(6-7i)$ و $c=(8+3i)$

0,75 ن — **1** أ) بين أن : $\frac{c-a}{b-a}=i$

0,75 ن — **1** ب) استنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في A .

2 ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق M' صورة M بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة Ω منتصف $[BC]$ و زاويته $\frac{-\pi}{2}$

0,50 ن — **2** أ) تحقق من أن لحق النقطة Ω هو $\omega=(7-2i)$.

0,75 ن — **2** ب) بين أن : $z'=-iz+9+5i$

0,25 ن — **2** ج) بين أن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران $\mathcal{R}$.

التمرين الثالث : (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4} \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \\ u_0=3 \end{cases}$

0,50 ن — **1** بين بالترجع أن : $u_n>1 \; ; \; (\forall n\in\mathbb{N})$.

2 نضع : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1} \; ; \; (\forall n\in\mathbb{N})$

0,50 ن — **2** أ) تحقق من أن : $1-v_n=\frac{2}{u_n+1} \; ; \; (\forall n\in\mathbb{N})$ و استنتج أن : $1-u_n>0 \; ; \; (\forall n\in\mathbb{N})$

0,50 ن — **2** ب) بين أن : $u_n=\frac{1+v_n}{1-v_n} \; ; \; (\forall n\in\mathbb{N})$

3	أ	بين أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و اكتب v_n بدلالة n .	1,00 ن
3	ب	بين أن : $\lim\limits_{n\infty} v_n = 0$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$.	0,50 ن

التمرين الرابع : (3 ن)

يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء و أربع كرات بيضاء و ثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

1	بين ان احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء هو $\frac{1}{22}$.	1,00 ن
2	بين أن احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون هو $\frac{3}{44}$.	1,00 ن
3	بين أن احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل هو $\frac{37}{44}$.	1,00 ن

التمرين الخامس : (8 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$

و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل لـ f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1		بين أن : $f(-x) = -f(x)$; $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$ و استنتج أن O مركز تماثل المنحنى $(\mathscr{C})$.	0,75 ن
2		تحقق من أن : $f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$; $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$ (يستحسن استعمال هذه الصيغة لـ $f(x)$ لمعالجة الأسئلة الموالية)	0,50 ن
3	أ	بين أن : $f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$; $(\forall x\epsilon\mathbb{R})$ و تحقق أن : $f'(0) = \frac{3}{2}$.	1,25 ن
3	ب	بين أن الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$.	0,50 ن
3	ج	بين أن $y = \frac{3}{2}x$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة O .	0,50 ن
4	أ	بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	0,50 ن
4	ب	أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - (x+1)\right)$ و استنتج أن $(D) : y = x + 1$ مقارب ل $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$	0,50 ن
4	ج	بين أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد تحت المستقيم (D) .	0,25 ن
5		أنشئ المستقيمين (D) و (T) و المنحنى $(\mathscr{C})$ (نذكر أن O مركز تماثل $(\mathscr{C})$).	1,50 ن
6	أ	بين أن الدالة : $H : x \to x - \ln(e^x + 1)$ دالة أصلية للدالة $h : x \to \frac{1}{e^x+1}$ على $\mathbb{R}$.	0,75 ن
6	ب	استنتج أن : $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1}dx = \ln 4 - \ln 3$	0,50 ن
6	ج	أحسب مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathscr{C})$ و (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x = 0$ و $x = \ln 2$.	0,50 ن

طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2012

التمرين الأول :

1 أ

لدينا : $\begin{cases} A(-3,0,0) \\ B(0,0,-3) \\ C(0,2,-2) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(3,0,-3) \\ \overrightarrow{AC}(3,2,-2) \end{cases}$

و منه :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

إذن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 6\vec{k})$

و نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على (ABC) .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .

فإن المتجهتان $\overrightarrow{AM}$ و $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ متعامدتان .

يعني : $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

يعني : $\begin{pmatrix} x+3 \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

يعني : $6(x+3) - 3y + 6z = 0$

يعني : $2x - y + 2z + 6 = 0$

و هذه الكتابة الأخيرة هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

1 ب

لدينا : $\begin{cases} (ABC) : 2x - y + 2z + 6 = 0 \\ \Omega(1,1,1) \end{cases}$

إذن : $d(\Omega,(ABC)) = \dfrac{|2 \times 1 - 1 + 2 \times 1 + 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{9}} = 3$

نلاحظ إذن أن : $d(\Omega,(ABC)) = 3 = Rayon(\mathcal{S})$

إذن : المستوى (ABC) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة $H(\alpha,\beta,\gamma)$.

2 أ

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (D) . لدينا $\begin{cases} (D) \perp (ABC) \\ \Omega \in (D) \end{cases}$

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

فإن المتجهتان $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ مستقيميتان .

يعني : $(\exists \theta \epsilon \mathbb{R})$; $\overrightarrow{\Omega M} = \theta(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$

يعني : $(\exists \theta \epsilon \mathbb{R})$; $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \theta \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

يعني : $(D) : \begin{cases} x - 1 = 6\theta \\ y - 1 = -3\theta \\ z - 1 = 6\theta \end{cases} ; (\theta \epsilon \mathbb{R})$

يعني : $(D) : \begin{cases} x = 6\theta + 1 \\ y = -3\theta + 1 \\ z = 6\theta + 1 \end{cases} ; (\theta \epsilon \mathbb{R})$

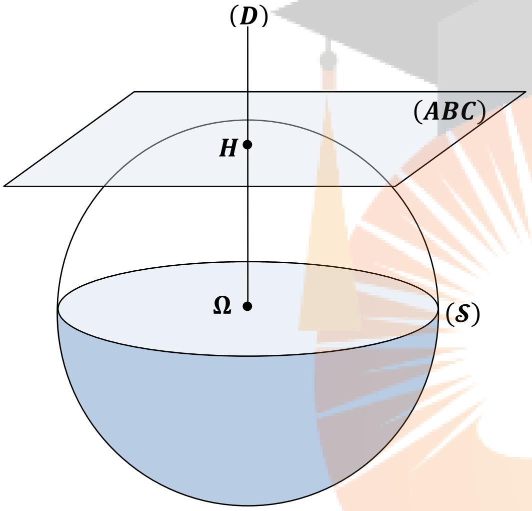
يعني : $(D) : \begin{cases} x = 2(3\theta) + 1 \\ y = -(3\theta) + 1 \\ z = 2(3\theta) + 1 \end{cases} ; (\theta \epsilon \mathbb{R})$

نضع : $3\theta = t$ نحصل على : $(D) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases} ; (t \epsilon \mathbb{R})$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (D) .

2 ب

في هذا السؤال سوف نستعمل التمثيل البارامتري للمستقيم (D) و المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) . و نستعين بالشكل التالي :



بما أن المستوى (ABC) مماس لـ $(\mathcal{S})$ في H . فإن : $\boxed{(\Omega H) \perp (ABC)}$ (1)

و نعلم أن : $\boxed{(D) \perp (ABC)}$ (2)

إذن من (1) و (2) نستنتج أن : $(\Omega H) \parallel (D)$

و بما أن : Ω نقطة مشتركة بين المستقيمين (ΩH) و (D) .

فإن المستقيمان (D) و (ΩH) منطبقان . يعني : $\boxed{H \epsilon (D)}$ (3)

حصلنا إذن على ما يلي : $\begin{cases} H \epsilon (D) \\ H \epsilon (ABC) \end{cases}$

و لدينا : $(D) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases} ; (t \epsilon \mathbb{R})$

و لدينا كذلك : $\begin{cases} H(\alpha,\beta,\gamma) \\ (ABC) : 2x - y + 2z + 6 = 0 \end{cases}$

بما أن $H(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة مشتركة بين المستقيم (D) و المستوى (ABC) .

فإن المثلوث (α,β,γ) يحقق كلاً من التمثيل البارمتري للمستقيم (D) و المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) .

إذن : $(\exists t \epsilon \mathbb{R}) : \begin{cases} \alpha = 2t + 1 \\ \beta = -t + 1 \\ \gamma = 2t + 1 \\ 2\alpha - \beta + 2\gamma + 6 = 0 \end{cases}$

نعوض قيم α و β و γ في المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$2(2t+1) - (-t+1) + 2(2t+1) + 6 = 0$$

يعني : $4t + t + 4t + 9 = 0$ إذن : $\boxed{t = -1}$

طريقكم YOUR WAY توجيه وإرشاد شباب المستقبل

نعوض t بقيمته -1 في المعادلات الثلاث الأولى نحصل على :

$$\begin{cases}\alpha = 2(-1)+1=-1\\ \beta=-(-1)+1=2\\ \gamma=2(-1)+1=-1\end{cases}$$

و بالتالي : $H(-1,2,-1)$ هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$

التمرين الثاني :

1 أ

لدينا : $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{(8+3i)-(2-i)}{(6-7i)-(2-i)} = \dfrac{6+4i}{4-6i} = \dfrac{3+2i}{2-3i}$

$$= \frac{(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{6+13i-6}{2^2-(3i)^2} = \frac{13i}{4+9} = \frac{13i}{13} = i$$

و بالتالي : $\boxed{\dfrac{c-a}{b-a}=i}$ $(*)$

1 ب

لدينا : $\dfrac{c-a}{b-a}=i$ إذن : $\begin{cases}\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = |i|\\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg(i)\ [2\pi]\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = 1\\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}|c-a| = |b-a|\\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}AC = AB\\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{cases}$

و بالتالي ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في نفس النقطة A .

2 أ

لدينا Ω منتصف القطعة $[BC]$. إذن : $aff(\Omega) = \dfrac{aff(B)+aff(C)}{2}$

يعني : $aff(\Omega) = \dfrac{(6-7i)+(8+3i)}{2} = (7-2i) = \omega$

2 ب

لدينا $\mathcal{R}$ دوران مُعرف بما يلي : $\mathcal{R}_{\Omega}\left(\frac{-\pi}{2}\right) : \begin{array}{ccc}(\mathcal{P}) & \mapsto & (\mathcal{P})\\ M(z) & \mapsto & M'(z')\end{array}$

و ننطلق من الكتابة التالية : $\mathcal{R}(M) = M'$

$$\Leftrightarrow (z'-\omega) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z-\omega)$$

$$\Leftrightarrow z'-(7-2i) = \left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)(z-7+2i)$$

$$\Leftrightarrow z'-(7-2i) = (-i)(z-7+2i)$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz+7i+2+7-2i$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz+5i+9$$

و هذه الكتابة الأخيرة تُعَبِّرُ عن الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$.

و بذلك يصبح الدوران $\mathcal{R}$ مُعَرّف بما يلي :

$$\mathcal{R}_{\Omega}\left(\frac{-\pi}{2}\right) : \begin{array}{ccc}(\mathcal{P}) & \mapsto & (\mathcal{P})\\ M(z) & \mapsto & M'(-iz+5i+9)\end{array}$$

2 ج

يكفي أن نبرهن على أن : $aff(C) = -i\,aff(A)+5i+9$

لدينا حسب المعطيات : $aff(A) = a = (2-i)$

إذن : $-i\,aff(A)+5i+9 = -i(2-i)+5i+9$

$$= -2i-1+5i+9 = 3i+8 = aff(C)$$

حصلنا إذن على : $-i\,aff(A)+5i+9 = aff(C)$

إذن حسب الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$ نستنتج أن : $\mathcal{R}(A) = C$

التمرين الثالث :

1

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $\boxed{(P_n) :\ (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n>1}$

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0 = 3 > 1$. إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن $n\in\mathbb{N}$ نفترض أن : $u_n > 1$.

نحتاج إلى أن نبرهن على أن : $u_{n+1} > 1$

و عادة ما ننطلق من $u_{n+1} > 1$ لكي نحدد العبارة التي سننطلق منها باستعمال المسار العكسي و هو ما سوف أعرضه الآن :

نحتاج إلى : $u_{n+1} > 1$

يعني نحتاج إلى : $\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4} > 1$

يعني نحتاج إلى : $4u_n+3 > 3u_n+4$

يعني نحتاج إلى : $u_n > 1$

و هذه المتفاوتة متوفرة لدينا حسب الإفتراض

إذن تمكنا من إيجاد المسار العكسي للبرهان .

و البرهان الذي يجب كتابته على ورقة التحرير هو التالي :

لدينا حسب الافتراض : $u_n > 1$

إذن : $4u_n - 3u_n > 4-3$ يعني : $4u_n+3 > 3u_n+4$

يعني : $\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4} > 1$ يعني : $u_{n+1} > 1$

أي أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

خلاصة : حصلنا على النتائج التالية : $\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\ (P_n)\ \Rightarrow\ (P_{n+1})\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n > 1$

2 أ

ليكن : $(n\in\mathbb{N})$. لدينا : $1-v_n = 1-\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

$$= \frac{u_n+1}{u_n+1} - \frac{u_n-1}{u_n+1} = \frac{2}{u_n+1}$$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1-v_n = \dfrac{2}{u_n+1}$

و نعلم حسب السؤال (1 أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n > 1$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n+1 > 2 > 0$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \dfrac{1}{u_n+1} > 0$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \dfrac{2}{u_n+1} > 0$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1-v_n > 0$

طريقي YOUR WAY
جمعية التوجيه و إرشاد شباب المستقبل

2 ب

ليكن $n\in\mathbb{N}$. لدينا حسب السؤال أ) : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

إذن : $v_n(u_n + 1) = u_n - 1$

يعني : $v_n u_n + v_n = u_n - 1$

أي : $v_n u_n - u_n = -1 - v_n$

يعني : $u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$

أي : $u_n = \frac{-1 - v_n}{v_n - 1}$ أي : $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$

3 أ

لدينا حسب السؤال 2) أ) : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = 1 - \frac{2}{u_n + 1}$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1} + 1}$

$$= 1 - \frac{2}{\left(\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} + 1\right)} = 1 - \frac{2}{\left(\frac{7u_n + 7}{3u_n + 4}\right)}$$

$$= 1 - \frac{2(3u_n + 4)}{7u_n + 7} = \frac{7u_n + 7 - 6u_n - 8}{7u_n + 7}$$

$$= \frac{(u_n - 1)}{7(u_n + 1)} = \frac{1}{7}v_n$$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_{n+1} = \frac{1}{7}\ v_n$

يعني : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$.

إذن الحد العام v_n يكتب على الشكل التالي : $v_n = v_0\left(\frac{1}{7}\right)^{n-0}$

لدينا : $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2}$ إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^n$

3 ب

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{7}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و هو عدد حقيقي موجب و أصغر من 1

إذن : $\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$ و منه : $\lim_{n\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

يعني : $\lim_{n\infty}(v_n) = 0$

و لدينا حسب السؤال 2) أ) : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$

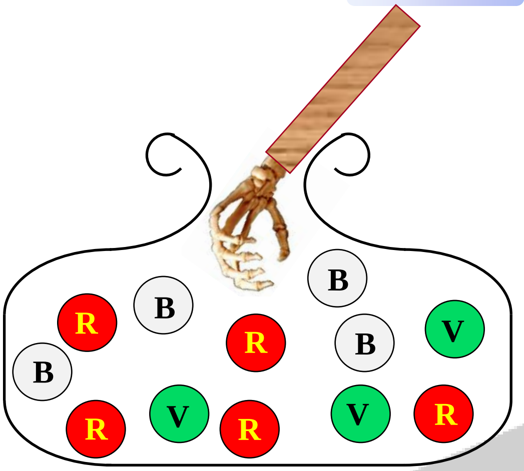
يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n + 1 = \frac{2}{1 - v_n}$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n = \frac{2}{1 - v_n} - 1$

و بالتالي : $\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(\frac{2}{1 - v_n} - 1\right) = \frac{2}{1 - 0} - 1 = 1$

يعني : $\boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = 1}$

التمرين الرابع :



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من كيس يحتوي على 12 كرة فإن التجربة تَحتمل C_{12}^3 نتيجة ممكنة . يعني : $card(\Omega) = C_{12}^3 = 220$. بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

$$p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\right) = \frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\right)}{card(\Omega)} = \frac{C_5^3}{220} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

2

$$p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون}\right) = p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\ \text{أو}\ \text{الحصول على ثلاث كرات بيضاء}\ \text{أو}\ \text{الحصول على ثلاث كرات خضراء}\right)$$

$$= p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\right) + p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات بيضاء}\right) + p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات خضراء}\right)$$

$$= \frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\right)}{card(\Omega)} + \frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات بيضاء}\right)}{card(\Omega)} + \frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات خضراء}\right)}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{C_5^3}{220} + \frac{C_4^3}{220} + \frac{C_3^3}{220} = \frac{10}{220} + \frac{4}{220} + \frac{1}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

3

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى :

$$p\left(\text{الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل}\right) = p\left(\text{كرة حمراء و كرتان تخالفان اللون الأحمر}\ \text{أو}\ \text{كرتين حمراوين و الأخرى مخالفة للأحمر}\ \text{أو}\ \text{ثلاث كرات حمراء}\right)$$

$$= p\left(\text{كرة حمراء و كرتان تخالفان اللون الأحمر}\right) + p\left(\text{كرتين حمراوين و الأخرى مخالفة للأحمر}\right) + p\left(\text{ثلاث كرات حمراء}\right)$$

$$= \frac{C_5^1 \times C_7^2}{card(\Omega)} + \frac{C_5^2 \times C_7^1}{card(\Omega)} + \frac{C_5^3 \times C_7^0}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{5 \times 21}{220} + \frac{10 \times 7}{220} + \frac{10}{220} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44}$$

YOUR WAY
جمعية لتوجيه وارشاد شباب المستقبل

الطريقة الثانية : استعمال تقنية الحدث المضاد .

إذا كان $\bar{A}$ هو الحدث المضاد للحدث A فإن : $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

نضع : $A = \{$ الحصول على كرة واحدة على الأقل $\}$

إذن : $\bar{A} = \{$ الحصول على ثلاث كرات من ألوان تخالف الأحمر $\}$

$$p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث كرات}\\ \text{تخالف اللون}\\ \text{الأحمر}\end{array}\right) = p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{بيضاء}\end{array} \text{ أو } \begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{خضراء}\end{array} \text{ أو } \begin{array}{c}\text{كرتين}\\ \text{بيضاوين}\\ \text{و الأخرى}\\ \text{خضراء}\end{array} \text{ أو } \begin{array}{c}\text{كرتين}\\ \text{خضراوين}\\ \text{و الأخرى}\\ \text{بيضاء}\end{array}\right)$$

$$= p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{بيضاء}\end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{خضراء}\end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c}\text{كرتين}\\ \text{بيضاوين}\\ \text{و الأخرى}\\ \text{خضراء}\end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c}\text{كرتين}\\ \text{خضراوين}\\ \text{و الأخرى}\\ \text{بيضاء}\end{array}\right)$$

$$= \frac{C_4^3}{220} + \frac{C_3^3}{220} + \frac{C_4^2 \times C_3^1}{220} + \frac{C_3^2 \times C_4^1}{220}$$

$$= \frac{4}{220} + \frac{1}{220} + \frac{18}{220} + \frac{12}{220} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

إذن : $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

يعني : $p(A) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{44-7}{44} = \frac{37}{44}$

و بالتالي : احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل هو : $\frac{37}{44}$

التمرين الخامس :

1

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

إذن : $f(-x) = -x + \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -x + \frac{e^{-x}(1 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)}$

$$= -x + \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^x} = -\left(x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) = -f(x)$$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(-x) = -f(x)$

و هذا يعني أن الدالة f دالة فردية و تمثيلها المبياني متماثل بالنسبة للنقطة O أصل المعلم .

2

لدينا : $x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} = x + \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{2}{e^x + 1}$

$$= x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = f(x)$$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$

3 أ

لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 1 - \left(\frac{2}{e^x + 1}\right)'$

$$= 1 - \left(\frac{-2e^x}{(e^x + 1)^2}\right) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

من أجل $x = 0$ نحصل على :

$$f'(0) = 1 + \frac{2e^0}{(e^0 + 1)^2} = 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

3 ب

لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

نعلم أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ e^x > 0$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ 2e^x > 0$ و $(e^2 + 1)^2 > 0$

و منه : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$

يعني : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f'(x) > 0$

إذن f دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3 ج

نعلم أن معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة x_0 تُكتب على الشكل :

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

إذن من أجل $x_0 = 0$ نجد : $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

يعني : $(T) : y = f'(0) \cdot x + f(0)$

و لدينا : $f'(0) = \frac{3}{2}$ و $f(0) = 0$

إذن المعادلة الديكارتية للمماس (T) تُصبح : $(T) : y = \frac{3}{2}x$

4 أ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}\right)$$

$$= \left(+\infty + 1 - \frac{2}{+\infty}\right) = (+\infty + 1 - 0) = +\infty$$

4 ب

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} - (x + 1)\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-2}{e^x + 1}\right) = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$

و منه : $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 1$

و لدينا من جهة أخرى : $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x + 1)}\right)$

$$= 1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty} = 1 + 0 - 0 = 1$$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

طريقك YOUR WAY جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

لقد حصلنا لحد الآن على النهايات التالية :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 1x = 1 \end{cases}$$

إذن من هذه النهايات الثلاث نستنتج أن المستقيم : $(D) : y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

4 ج

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x+1)$.

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) - (x+1) &= (x+1) - \frac{2}{e^x+1} - (x+1) \\ &= \frac{-2}{e^x+1} \end{aligned}$$

و نعلم أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; e^x > 0$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; e^x + 1 > 0$

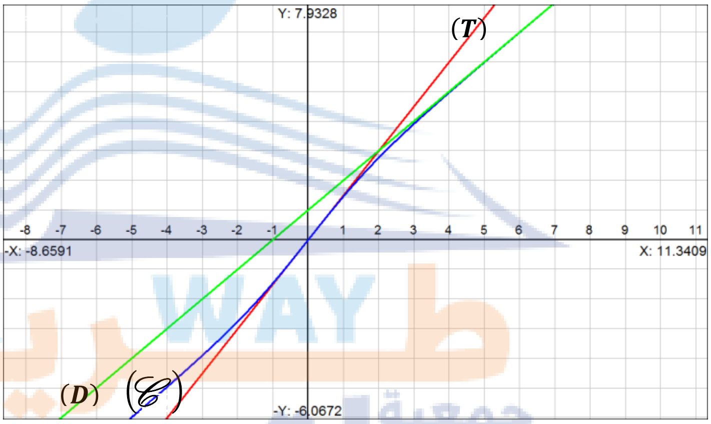
يعني : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; \dfrac{-2}{e^x+1} < 0$

يعني : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; f(x) - (x+1) < 0$

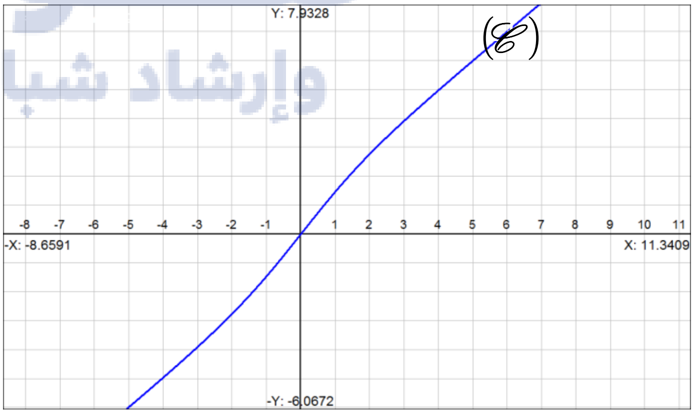
يعني : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; f(x) < (x+1)$

و بالتالي : المستقيم (D) يوجد فوق المنحنى $(\mathscr{C})$

5



المنحنى $(\mathscr{C})$ لوحده



6 أ

ليكن x عددا حقيقيا . لدينا :

$$\begin{aligned} H'(x) &= (x - \ln(e^x+1))' \\ &= 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} = h(x) \end{aligned}$$

إذن H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

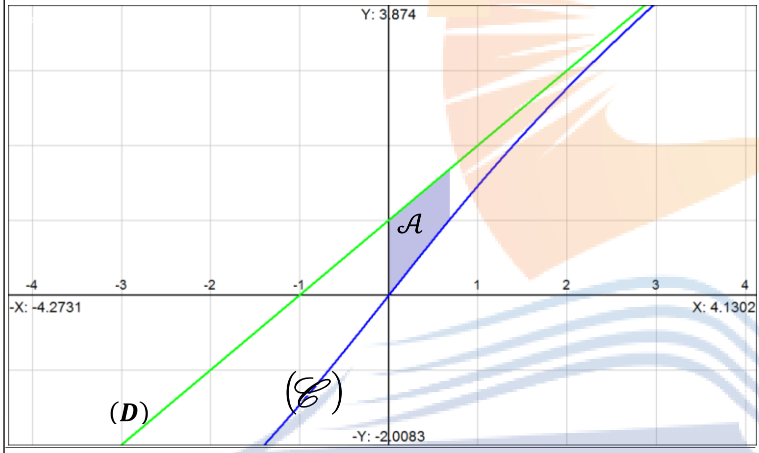
6 ب

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x+1}\right) dx &= \int_0^{\ln 2} h(x)\, dx = [H(x)]_0^{\ln 2} \\ &= [x - \ln(e^x+1)]_0^{\ln 2} = (\ln 2 - \ln 3) - (0 - \ln 2) \\ &= 2\ln 2 - \ln 3 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

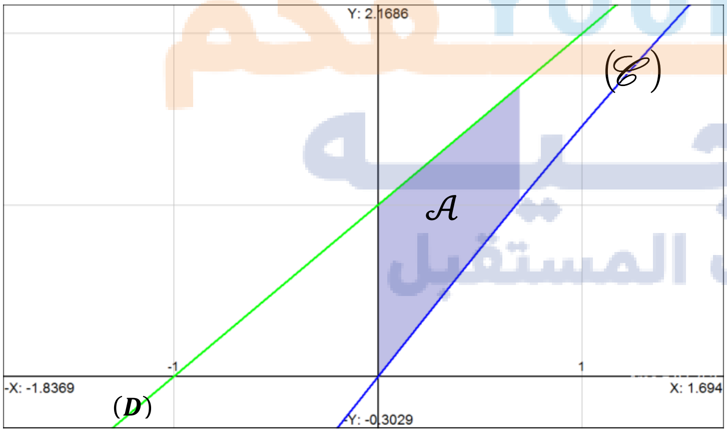
6 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) و المستقيمين $x = 0$ و $x = \ln 2$. لدينا :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{\ln 2} |f(x) - (x+1)|\, dx = \int_0^{\ln 2} \left|\frac{-2}{e^x+1}\right| dx \\ &= 2\int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x+1}\right) dx = 2\left(\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right) \approx 0{,}57 \; unité^2 \end{aligned}$$



صورة أخرى للمساحة $\mathcal{A}$



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الإمتحانات

الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2013

مادة الرياضيات
العلوم التجريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجية بمسلكيها
مدة الانجاز 3h - المعامل 7

التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A(-1,1,0)$ و $B(1,0,1)$ و $\Omega(1,1,-1)$ و الفلكة $(\mathcal{S})$ التي مركزها Ω و شعاعها 3 .

1 أ : بين أن $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ و تحقق من أن $x+y-z=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) . — 1,00 ن

1 ب : تحقق من أن : $d\big(\Omega,(OAB)\big)=\sqrt{3}$ ثم بين أن المستوى (OAB) يقطع الفلكة $(\mathcal{S})$ وفق دائرة (Γ) شعاعها $\sqrt{6}$ — 1,00 ن

2 : ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω و العمودي على المستوى (OAB) .

2 أ : بين أن : $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=-1-t\end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) . — 0,50 ن

2 ب : حدد مثلوث إحداثيات مركز الدائرة (Γ) . — 0,50 ن

التمرين الثاني : (3 ن)

نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c بحيث :

$a=7+2i$ و $b=4+8i$ و $c=-2+5i$.

1 أ : تحقق من أن : $(1+i)(-3+6i)=-9+3i$ و بين أن : $\dfrac{c-a}{b-a}=1+i$ — 0,75 ن

1 ب : استنتج أن : $AC=AB\cdot\sqrt{2}$ و اعط قياسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$. — 1,00 ن

2 : ليكن $\mathcal{R}$ الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

2 أ : بين أن لحق النقطة D صورة النقطة A بالدوران $\mathcal{R}$ هو : $d=10+11i$. — 0,75 ن

2 ب : أحسب $\dfrac{d-c}{b-c}$ و استنتج أن النقط B و C و D مستقيمية . — 0,50 ن

التمرين الثالث : (3 ن)

يحتوي صندوق على 10 كرات :
خمس منها حمراء و ثلاث كرات خضراء و كرتان بيضاوين (لا يمكن التمييز بينها باللمس)
نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من الصندوق .
نعتبر الحدثين A و B المعرفين بما يلي :
A : " الحصول على كرتان حمراوين و كرتين خضراوين "
B : " لا توجد أية كرة بيضاء من بين الكرات الأربع المسحوبة "

1 : بين أن : $p(A)=\dfrac{1}{7}$ و $p(B)=\dfrac{1}{3}$ — 1,50 ن

2 : ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المسحوبة .

2 أ : تحقق من أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 و 1 و 2 . — 0,25 ن

YOUR WAY

1,25 ن **2** **ب** بين أن : $p[X=1]=\frac{8}{15}$ ثم حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

التمرين الرابع : (3 ن)

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\boxed{\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{25}{10-u_n} \; ; \; (\forall n\in\mathbb{N}^*) \\ u_1=0 \end{cases}}$$

1,00 ن **1** تحقق من أن : $5-u_{n+1}=\frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

و بين بالترجع أن : $5-u_n>0$; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$.

2 نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $v_n=\frac{5}{5-u_n}$; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

0,75 ن **2** **أ** بين أن : $v_{n+1}=\frac{10-u_n}{5-u_n}$; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ثم تحقق من أن : $v_{n+1}-v_n=1$; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

1,00 ن **2** **ب** بين أن : $v_n=n$; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ و استنتج أن : $u_n=5-\frac{5}{n}$; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

0,25 ن **2** **ج** حدد : $\lim_{n\infty} u_n$

التمرين الخامس : (8 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boxed{f(x)=(x-2)^2e^x}$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $1\,cm$)

0,75 ن **1** بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

ثم استنتج أن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه .

0,25 ن **2** **أ** تحقق من أن : $f(x)=x^2e^x-4xe^x+4e^x$; $(\forall x\in\mathbb{R})$

0,50 ن **2** **ب** بين أن : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ثم أوّل النتيجة هندسيا (نذكر أن : $\lim_{x\to-\infty} x^ne^x=0$)

0,75 ن **3** **أ** بين أن : $f'(x)=x(x-1)e^x$; $(\forall x\in\mathbb{R})$

1,00 ن **3** **ب** بين أن f تزايدية على كل من $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ و أن f تناقصية على $[0;2]$.

ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

1,00 ن **4** **أ** بين أن : $f''(x)=(x^2-2)e^x$; $(\forall x\in\mathbb{R})$ ثم استنتج أن للمنحنى $(\mathcal{C})$ نقطتي انعطاف تحديد أرتوبيهما غير مطلوب .

1,00 ن **4** **ب** أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,50 ن **5** **أ** بين أن $H:x\mapsto(x-1)e^x$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$

ثم احسب $\int_0^1 xe^x\,dx$

0,75 ن **5** **ب** باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^1 x^2e^x\,dx=e-2$

0,50 ن **5** **ج** بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$ هي : $5(e-2)\,cm^2$.

0,50 ن **6** استعمل المنحنى $(\mathcal{C})$ لإعطاء حلول المعادلة $x^2=e^{-x}+4x-4$ مع $(x\in\mathbb{R})$.

طريقكم YOUR WAY جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

أجوبة امتحان الدورة العادية 2013

التمرين الأول

1 أ

لدينا : $\begin{cases} A(-1;1;0) \\ B(1;0;1) \\ O(0;0;0) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{OA}(-1;1;0) \\ \overrightarrow{OB}(1;0;1) \end{cases}$

و منه :

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستوى (OAB) .

نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ متجهة منظمية على المستوى (OAB) .

إذن فهي عمودية على جميع متجهات المستوى (OAB)

إذن المتجهتان $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ متعامدتان

يعني ، باستعمال الجداء السلمي : $\overrightarrow{OM} \cdot \left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right) = 0$

أي : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ يعني : $x + y - z = 0$

و هذه الكتابة الأخيرة تميز نقط المستوى (OAB)

إذن فهي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) .

1 ب

لدينا $\Omega(1;1;-1)$ و $(OAB) : x + y - z = 0$

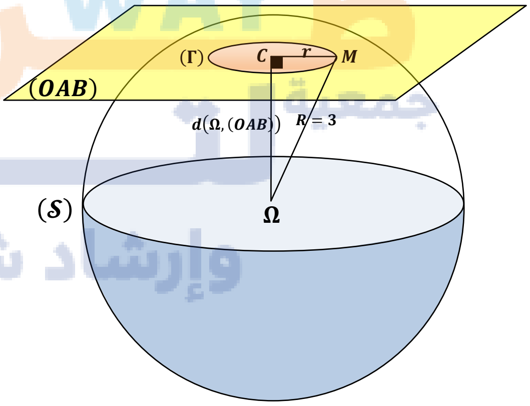
إذن : $d\left(\Omega,(OAB)\right) = \dfrac{|1+1-(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

و نعلم أن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها Ω و شعاعها $R = 3$.

نلاحظ إذن أن : $\sqrt{3} < 3$ يعني : $d\left(\Omega,(OAB)\right) < Rayon(\mathcal{S})$

إذن المستوى (OAB) يقطع الفلكة $(\mathcal{S})$ وفق دائرة (Γ) مركزها $C(\alpha;\beta;\gamma)$ و شعاعها r .

لتحديد قيمة الشعاع r نستعين بالشكل التالي :



من خلال هذا الشكل نلاحظ أن : $(OAB) \perp (\Omega C)$ إذن : $(\Omega C) \perp (CM)$

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة فيتاغورس في ΩCM المثلث القائم الزاوية في C

إذن : $\Omega M^2 = \Omega C^2 + CM^2$

يعني : $3^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + r^2$ يعني : $r = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6}$

2 أ

ليكن (Δ) المستقيم المار من Ω و العمودي على المستوى (OAB) .

و لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) .

بما أن (Δ) عمودي على (OAB) و $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ منظمية على (OAB) فإن أي متجهة موجهة لـ (Δ) تكون مستقيمية مع المتجهة $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.

لدينا $\overrightarrow{\Omega M}$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) .

إذن المتجهتان $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ مستقيميتان .

يعني : $\overrightarrow{\Omega M} = t\left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right)$; $(\exists t \epsilon \mathbb{R})$

أي : $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $(\exists t \epsilon \mathbb{R})$

يعني : $(\Delta) : \begin{cases} x - 1 = t \\ y - 1 = t \\ z + 1 = -t \end{cases}$; $(t \epsilon \mathbb{R})$

يعني : $(\Delta) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t - 1 \end{cases}$; $(t \epsilon \mathbb{R})$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

2 ب

بما أن (Δ) مار من Ω و عمودي على (OAB) فإن (Δ) و (ΩC) منطبقان

يعني : $C(\alpha;\beta;\gamma) \epsilon (\Delta)$

و لدينا من جهة ثانية : $C(\alpha;\beta;\gamma) \epsilon (OAB)$

نحصل إذن على النظمة التالية : $\begin{cases} C(\alpha;\beta;\gamma) \epsilon (\Delta) \\ C(\alpha;\beta;\gamma) \epsilon (OAB) \end{cases}$

و نعلم أن : $\begin{cases} (\Delta) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t - 1 \end{cases} ; \ (t \epsilon \mathbb{R}) \\ (OAB) : x + y - z = 0 \end{cases}$

إذن نعوض x و y و z بالمجاهيل α و β و γ نجد : $\begin{cases} \alpha = 1 + t \\ \beta = 1 + t \\ \gamma = -1 - t \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$

نعوض بعد ذلك α و β و γ بالتعابير التي تضم البارامتر t في آخر معادلة

نجد : $(1 + t) + (1 + t) — (-1 - t) = 0$

و نحل هذه المعادلة الظريفة من الدرجة الأولى بمجهول واحد نجد :

$3t + 3 = 0$ أي : $t = -1$

نعوض t بالقيمة -1 في تعابير α و β و γ نجد : $\begin{cases} \alpha = 1 - 1 = 0 \\ \beta = 1 - 1 = 0 \\ \gamma = -1 + 1 = 0 \end{cases}$

إذن النقطة C التي نبحث عنها ما هي إلا O أصل المعلم .

و بالتالي (Γ) دائرة مركزها O أصل المعلم .

التمرين الثاني

1 أ

$$(1 + i)(-3 + 6i) = -3 + 6i - 3i - 6 = -9 + 3i$$

الهدف من هذه المتساوية هو توظيفها أثناء حساب $\dfrac{c - a}{b - a}$

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{(-2 + 5i) - (7 + 2i)}{(4 + 8i) - (7 + 2i)} = \frac{-9 + 3i}{-3 + 6i}$$

$$= \frac{(1 + i)(-3 + 6i)}{(-3 + 6i)} = (1 + i)$$

1 ب

لدينا : $\dfrac{c-a}{b-a} = 1+i$ إذن : $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = |1+i|$

يعني : $\dfrac{|c-a|}{|b-a|} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

إذن : $|c-a| = \sqrt{2}\cdot|b-a|$

أي : $AC = \sqrt{2}\cdot AB$

من جهة ثانية ، لدينا : $\dfrac{c-a}{b-a} = 1+i$

لنكتب العدد العقدي $(1+i)$ على الشكل المثلثي :

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

إذن : $\dfrac{c-a}{b-a} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

و منه : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\ [2\pi]$

يعني : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

أي : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

إذن $\frac{\pi}{4}$ قياس للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

2 أ

لدينا الدوران $\mathcal{R}$ معرف بما يلي :

$$\mathcal{R}_B\left(\frac{\pi}{2}\right) : \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$$

ننطلق من المعطى : $\mathcal{R}(A) = D$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$\left(aff(D) - aff(B)\right) = e^{\frac{i\pi}{2}}\left(aff(A) - aff(B)\right)$$

يعني : $(d-b) = e^{\frac{i\pi}{2}}(a-b)$

يعني : $d - 4 - 8i = i(7+2i-4-8i)$

يعني : $d = 7i - 2 - 4i + 8 + 4 + 8i$

أي : $d = 10 + 11i$

2 ب

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{(10+11i) - (-2+5i)}{(4+8i) - (-2+5i)}$$
$$= \frac{12+6i}{6+3i} = \frac{2(6+3i)}{(6+3i)} = 2$$

إذن : $\dfrac{d-c}{b-c} = 2$ و منه : $(d-c) = 2(b-c)$

و باستعمال المتجهات نكتب : $\overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{CB}$

إذن النقط C و B و D نقط مستقيمية .

يمكن أن نجيب بطريقة أخرى مبينة كما يلي :

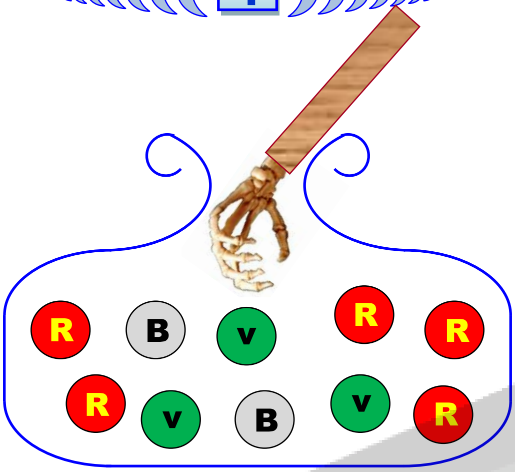
لدينا : $\dfrac{d-c}{b-c} = 2$ إذن : $\arg\left(\dfrac{d-c}{b-c}\right) \equiv 0\ [2\pi]$

يعني : $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv 0[2\pi]$

إذن النقط C و B و D نقط مستقيمية .

التمرين الثالث

1



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات فإنه توجد C_{10}^4 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_{10}^4 = 210$

بحيث Ω هو كون امكانيات هذه التجربة العشوائية .

لدينا :

$$p(A) = p\left(\text{كرتان حمراوين و كرتان خضراوين}\right) = \frac{card\left(\text{كرتان حمراوين و كرتان خضراوين}\right)}{card(\Omega)}$$
$$= \frac{C_5^2 \times C_3^2}{210} = \frac{10\times 3}{210} = \frac{1}{7}$$

و لدينا كذلك :

$$p(B) = p\left(\text{لا توجد أية كرة بيضاء مما سحبناه}\right)$$

و نلاحظ أن :

$$\left(\text{توجد على الأقل كرة بيضاء من بين الكرات الأربع المسحوبة}\right) = \overline{\left(\text{لا توجد أية كرة بيضاء مما سحبناه}\right)}$$
$$= \left(\text{كرتان بيضاوين و كرتان تخالفان اللون الأبيض}\right) \text{ أو } \left(\text{كرة بيضاء واحدة و ثلاث كرات غير ذلك}\right)$$

$$p\left(\text{توجد على الأقل كرة بيضاء من بين الكرات الأربع المسحوبة}\right) = p\left(\text{كرة بيضاء واحدة و ثلاث كرات غير ذلك}\right) + p\left(\text{كرتان بيضاوين و كرتان تخالفان اللون الأبيض}\right)$$
$$= \frac{C_2^1 \times C_8^3}{210} + \frac{C_2^2 \times C_8^2}{210} = \frac{2\times 56}{210} + \frac{28}{210} = \frac{2}{3}$$

و بالتالي : $p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

2 أ

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة (يعني سحب أربع كرات في آن واحد) بعدد الكرات المسحوبة .

يضم الصندوق كرتين بيضاوين و 8 كرات تخالف اللون الأبيض .

إذن عندما نسحب في آن واحد أربع كرات فإنه يُحتمل الحصول على كرات كلها تخالف الأبيض ، أو الحصول على كرة بيضاء واحدة و الباقي يخالف الأبيض ، أو الحصول على كرتين بيضاوين و كرتين غير ذلك .

إذن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي : 0 و 1 و 2

أو بتعبير أجمل : $X(\Omega) = \{0;1;2\}$

2 ب

لدينا الحدث $[X = 1]$ هو الحصول بالضبط على كرة بيضاء واحدة و ثلاث كرات مخالفة للون الأبيض .

إذن : $p[X = 1] = \frac{C_2^1 \times C_8^3}{210} = \frac{2 \times 56}{210} = \frac{8}{15}$

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X احتمال كل قيمة من قيم هذا المتغير العشوائي .

لدينا حسب السؤال 1) : $p(B) = \frac{1}{3}$ إذن : $p[X = 0] = \frac{1}{3}$

يكفي الآن أن نحسب $p[X = 2]$

الحدث $[X = 2]$ هو الحصول بالضبط على كرتين بيضاوين و كرتين تخالفين الأبيض

إذن : $p[X = 2] = \frac{C_2^2 \times C_8^2}{210} = \frac{28}{210} = \frac{2}{15}$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$\begin{aligned} P_X :\ \{0;1;2\} &\mapsto [0;1] \\ 0 &\mapsto P_X(0) = \frac{1}{3} \\ 1 &\mapsto P_X(1) = \frac{8}{15} \\ 2 &\mapsto P_X(2) = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

و للتأكد من صحة الجواب يجب أن نتحقق من أن :

$$P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) = 1$$

التمرين الرابع

1

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. لدينا :

$$5 - u_{n+1} = 5 - \frac{25}{10 - u_n} = \frac{50 - 5u_n - 25}{10 - u_n} = \frac{25 - 5u_n}{10 - u_n} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$$

لنبين بالترجع صحة العبارة (P_n) المعرفة بما يلي :

$$(P_n) :\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ 5 - u_n > 0$$

لدينا : $5 - 0 > 0$ يعني : $5 - u_1 > 0$

إذن العبارة (P_1) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) :\ 5 - u_n > 0$

إذن الكمية $(5 - u_n)$ كمية موجبة قطعا .

و منه فإن الكميتان $5(5 - u_n)$ و $5 + (5 - u_n)$ موجبتان قطعا .

إذن $\frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$ كمية موجبة قطعا باعتبارها خارج كميتين موجبتين قطعا

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)} > 0$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ 5 - u_{n+1} > 0$

إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

نحصل إذن على ما يلي : $\begin{cases} (P_1)\ est\ vraie \\ (P_n)\ implique\ (P_{n+1})\ ;\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ 5 - u_n > 0$

2 أ

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$. لدينا : $v_n = \frac{5}{5 - u_n}$

إذن :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{5}{5 - u_{n+1}} = 5 \times \left(\frac{1}{5 - u_{n+1}}\right) \\ &= 5 \times \left(\frac{5 + (5 - u_n)}{5(5 - u_n)}\right) = \frac{5 + (5 - u_n)}{(5 - u_n)} = \frac{10 - u_n}{5 - u_n} \end{aligned}$$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ v_{n+1} = \frac{10 - u_n}{5 - u_n}$

و منه :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{10 - u_n}{5 - u_n} - \frac{5}{5 - u_n} \\ &= \frac{10 - u_n - 5}{5 - u_n} = \frac{5 - u_n}{5 - u_n} = 1 \end{aligned}$$

2 ب

بما أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ v_{n+1} - v_n = 1$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ v_{n+1} = v_n + 1$

فإن : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية حسابية أساسها 1 .

إذن حدها العام v_n يكتب على الشكل :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ v_n = v_1 + (n - 1)1$$

لدينا : $v_1 = \frac{5}{5 - u_1} = \frac{5}{5 - 0} = 1$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ v_n = 1 + (n - 1)1$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ v_n = n$

و بما أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ v_n = \frac{5}{5 - u_n}$

فإن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ n = \frac{5}{5 - u_n}$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ 5n - nu_n = 5$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ nu_n = 5n - 5$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n = 5 - \frac{5}{n}$

2 ج

$$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(5 - \frac{5}{n}\right) = 5 - \frac{5}{\infty} = 5 - 0 = 5$$

التمرين الخامس

1

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} (x - 2)^2 e^x = (+\infty - 2)^2 e^{+\infty} \\ &= (+\infty)e^{+\infty} = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x - 2)^2 e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} (x - 2)^2 \left(\frac{e^x}{x}\right) \\ &= (+\infty)^2 \times (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

نحصل إذن على النهايتين التاليتين : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$

و من هاتين النهايتين نستنتج أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

طريق YOUR WAY
جمعية التوجيه وارشاد شباب المستقبل

2 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = (x-2)^2e^x &= (x^2-4x+4)e^x \\ &= x^2e^x - 4xe^x + 4e^x \end{aligned}$$

2 ب

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2e^x}_{\xrightarrow{x\to-\infty} \mathbf{0^+}} - 4\underbrace{xe^x}_{\xrightarrow{x\to-\infty} \mathbf{0^-}} + 4\underbrace{e^x}_{\xrightarrow{x\to-\infty} \mathbf{0^+}} = 0$$

محور الأفاصيل مقارب أفقي
للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$

ملاحظة : $$\lim_{x\to-\infty} x^ne^x = \begin{cases} 0^+ & si \;\; n\ est\ pair \\ 0^- & si \;\; n\ est\ impair \end{cases}$$

3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $f(x) = (x-2)^2e^x$

إذن : $$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-2)e^x + (x-2)^2e^x \\ &= (x-2)e^x\big(2+(x-2)\big) \\ &= (x-2)xe^x \end{aligned}$$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}) \;;\; f'(x) = x(x-2)e^x$

3 ب

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}) \;;\; f'(x) = x(x-2)e^x$

نعلم أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}) \;;\; e^x > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارتي x و $(x-2)$

و يُبَيِّنُ الجدول التالي إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

إذن من خلال هذا الجدول نستنتج أن f تزايدية على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ و تناقصية على المجال $[0;2]$.

4 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $f'(x) = x(x-2)e^x$

إذن : $f''(x) = (x-2)e^x + xe^x + x(x-2)e^x$

ملاحظة : $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

و بالتالي : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}) \;;\; f''(x) = (x^2-2)e^x$

و نعلم أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}) \;;\; e^x > 0$

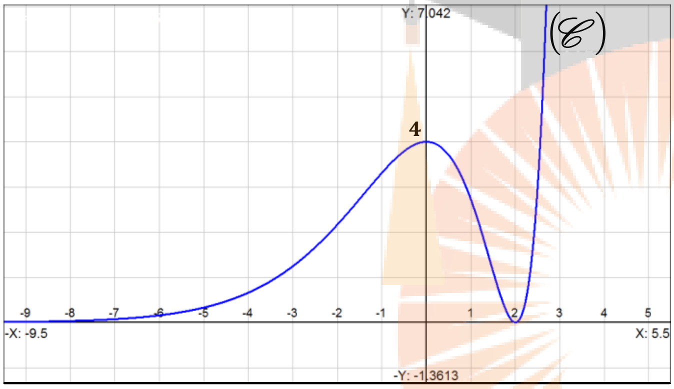
إذن إشارة $f''(x)$ تتعلق فقط بإشارة (x^2-2) و نلاحظ أن يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما هما حلا المعادلة $x^2-2=0$

يعني : $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$

أي : $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$.

إذن المنحنى يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما هما $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$.

4 ب



5 أ

نعتبر الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $H(x) = (x-1)e^x$

نلاحظ أن H دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن تشكيلة منسجمة من الدوال المتصلة على $\mathbb{R}$.

و لدينا : $$\begin{aligned} H'(x) &= \big((x-2)e^x\big)' \\ &= e^x + (x-1)e^x = xe^x = h(x) \end{aligned}$$

إذن الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x}_{v'}\,dx &= [uv]_0^1 - \int_0^1 u'\,v\,dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 \\ &= (e-0)-(e-1) = 1 \end{aligned}$$

5 ب

نحسب التكامل التالي باستعمال تقنية المكاملة بالأجزاء .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{e^x}_{v'}\,dx &= [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x\,dx \\ &= [x^2e^x]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x\,dx \\ &= (e-0) - 2\times 1 = e-2 \end{aligned}$$

إذن : $$\boxed{\int_0^1 x^2e^x\,dx = e-2}$$

YOUR WAY
وإرشاد شباب المستقبل

5 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الجزء من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ ومحور الأفاصيل و المستقيمين $x = 0$ و $x = 1$.

نحسب $\mathcal{A}$ باستعمال التكامل التالي : $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\,dx$

نعلم أن الدالة f تناقصية على $[0;2]$.

إذن فهي تناقصية على المجال $[0;1]$.

إذا كان : $0 \leq x \leq 1$ فإن : $f(0) \geq f(x) \geq f(1)$

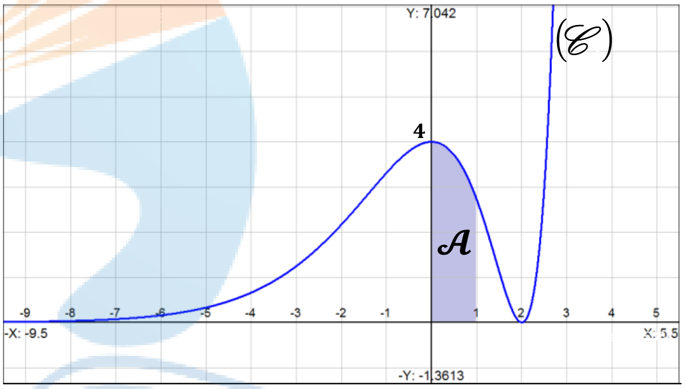
و منه : $4 \geq f(x) \geq e \geq 0$

إذن : $f(x)$ كمية موجبة قطعا على المجال $[0;1]$.

و منه : $\forall x \epsilon [0;1]\ ;\ |f(x)| = f(x)$

و بالرجوع إلى المساحة $\mathcal{A}$ نكتب :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 (x^2e^x - 4xe^x + 4e^x)\,dx \\
&= \int_0^1 x^2e^x\,dx - 4\int_0^1 xe^x\,dx + 4\int_0^1 e^x\,dx \\
&= (e-2) - 4 \times 1 + 4[e^x]_0^1 \\
&= (e-2) - 4 + 4(e-1) = 5e - 10 \\
&= 5(e-2) \approx 3{,}59\ cm^2
\end{aligned}$$



6

المعادلة : $x^2 = e^{-x} + 4x - 4$

تصبح : $x^2 - 4x + 4 = e^{-x}$

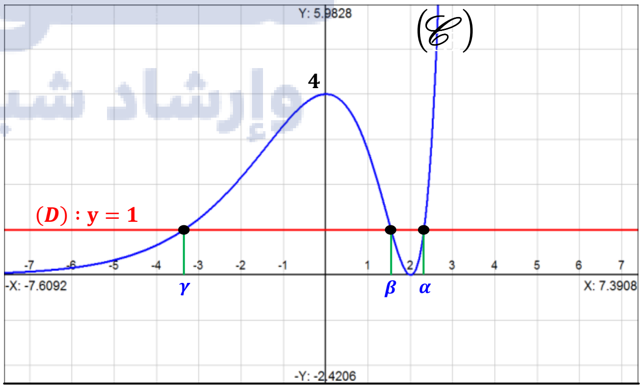
نضرب طرفي هذه المعادلة في الكمية الموجبة قطعا e^{-x} نجد :

$e^x(x^2 - e^{-x} - 4x + 4) = 0$

يعني : $x^2e^x - 4xe^x + 4e^x = 1$ يعني : $f(x) = 1$

إذن حلول هذه المعادلة الأخيرة هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) ذو المعادلة $(D) : y = 1$.

و هو ما يُبَيِّنه الشكل التالي :



إذن : المعادلة تقبل ثلاثة حلول و هي α و β و γ .

طريقكم YOUR WAY لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

الإمتحـــــان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريـــــــا
الدورة الإستدراكيـــة 2013

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

مـــادة الريـــــاضيات
العلوم التجـــريبية بمسالكها
العلوم التكنولوجــية بمسلكيها
مدة الانجاز 3h - المعامل 7

التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط $A(0,0,1)$ و $B(1,1,1)$ و $C(2,1,2)$ و الفلكة $(\mathcal{S})$ التي مركزها $\Omega(1,-1,0)$ و شعاعها $R=\sqrt{3}$

1 بين أن : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ معادلة ديكارتية للفلكة $(\mathcal{S})$ ثم تحقق أن $A\in(\mathcal{S})$. — 1,00 ن

2 **أ** بين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ ثم استنتج أن : $x-y-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) . — 0,75 ن

2 **ب** بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة يتم تحديدها . — 0,50 ن

ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω و العمودي على المستوى (ABC) .

3 **أ** بين أن : $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=-t \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) . — 0,50 ن

3 **ب** استنتج مثلوث احداثيتي نقطتي تقاطع (Δ) مع $(\mathcal{S})$. — 0,25 ن

التمرين الثاني : (3 ن)

1 حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+25=0$ — 1,00 ن

2 نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي a و b و c بحيث : $a=4+3i$ و $b=4-3i$ و $c=10+3i$.

2 **أ** بين أن لحق النقطة D صورة النقطة A بالإزاحة T ذات المتجهة $\overrightarrow{BC}$ هو $d=10+9$. — 0,75 ن

2 **ب** تحقق من أن : $\dfrac{b-a}{d-a}=\dfrac{-1}{2}(1+i)$ — 0,50 ن

2 **ج** استنتج أن : $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\dfrac{5\pi}{4}\;[2\pi]$ — 0,75 ن

التمرين الثالث : (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{1}{5}u_n+\dfrac{4}{5} \;;\; (\forall n\in\mathbb{N}) \\ u_0=2 \end{cases}$$

1 تحقق من أن : $u_{n+1}-1=\frac{1}{5}(u_n-1)$; $(\forall n\in\mathbb{N})$ — 0,50 ن

2 **أ** بين بالترجع أن : $u_n>1$; $(\forall n\in\mathbb{N})$ — 0,50 ن

طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

0,50 ن | 2 | ب | بين أن $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .

3 | لتكن $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المتتالية العددية بحيث : $v_n = u_n - 1 \quad ; \quad (\forall n\epsilon\mathbb{N})$

0,75 ن | 3 | أ | بين أن $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية هندسية ثم أكتب v_n بدلالة n

0,75 ن | 3 | ب | بين أن : $\lim_{n\infty} u_n = 1$

التمرين الرابع : (3 ن)

يحتوي كيس على تسع بيدقات : ثلاث بيدقات سوداء و أربع بيدقات بيضاء و بيدقتين خضراوين (لا يمكن التمييز بينها باللمس) . نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث بيدقات من هذا الكيس .

1,00 ن | 1 | أحسب احتمالي الحدثين A و B المعرفين كما يلي :

A " سحب ثلاث بيدقات من نفس اللون "

B " سحب ثلاث بيدقات مختلفة مثنى مثنى "

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد البيدقات السوداء المسحوبة .

0,50 ن | 2 | أ | حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

1,00 ن | 2 | ب | أحسب $p[X=1]$ و $p[X=2]$.

0,50 ن | 2 | ج | حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

التمرين الخامس : (8 ن)

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $\boxed{g(x) = x^2 - x - \ln x}$

0,25 ن | I | 1 | تحقق أن : $(2x+1)(x-1) = 2x^2 - x - 1$

0,50 ن | I | 2 | أحسب $g'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$.

0,50 ن | I | 3 | أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]0;+\infty[$. و استنتج أن : $\forall\, x\,\epsilon\,]0,+\infty[\; ; \; g(x) \geq 0$

II | نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $\boxed{f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2}$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (الوحدة : $1\ cm$)

0,75 ن | II | 1 | أ | أحسب النهاية : $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ثم أوِّل النتيجة مبيانيا .

1,00 ن | II | 1 | ب | بين أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

0,75 ن | II | 2 | أ | أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$. ثم بين أن : $\left(\frac{g(x)}{x} + 1\right) = \frac{1}{2} f'(x)$

0,50 ن | II | 2 | ب | استنتج منحى تغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$.

0,50 ن | II | 3 | أ | حدد معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة $A(1,0)$.

1,00 ن | II | 3 | ب | أنشئ $(\mathscr{C})$ و (Δ) في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن | II | 4 | أ | بين أن الدالة $x \longmapsto x(\ln x - 1)$ دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$

ثم أحسب التكامل التالي : $\int_1^e \ln x\, dx$

1,00 ن | II | 4 | ب | باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_1^e (\ln x)^2\, dx = e - 2$

0,25 ن | II | 4 | ج | أحسب بالوحدة cm^2 مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي : $x = 1$ و $x = e$.

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2013

التمريـــن الأول

1

لدينا $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1,-1,0)$ و شعاعها $R=\sqrt{3}$.

إذن : معادلتها الديكارتية تُكتب على الشكل التالي :

$$(\mathcal{S}) :\ (x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$$

بعد النشر و التبسيط نحصل على الكتابة التالية :

$$(\mathcal{S}) :\ x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$$

و هي عبارة عن معادلة ديكارتية للفلكة $(\mathcal{S})$.

و لكي تكون $A(0,0,1)$ نقطة من نقط الفلكة $(\mathcal{S})$ ،

يكفي أن تُحقق إحداثياتها معادلة $(\mathcal{S})$.

لدينا : $0^2+0^2+1^2-2\times0+2\times0-1=0$

إذن بالفعل نستنتج أن : $A\,\epsilon\,(\mathcal{S})$

2 أ

لدينا : $\begin{cases} A(0,0,1) \\ B(1,1,1) \\ C(2,1,2) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(1,1,0) \\ \overrightarrow{AC}(2,1,1) \end{cases}$

و منه :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}\vec{k} \\ &= \vec{\imath}-\vec{\jmath}-\vec{k} \end{aligned}$$

المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) تُكتَبُ بصفة عامة على الشكل :

$$(ABC) : ax+by+cz+d=0$$

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .

فإنه نستطيع أن نأخذ $a=1$ و $b=-1$ و $c=-1$.

إذن معادلة (ABC) تصبح : $(ABC)\ :\ x-y-z+d=0$

لإيجاد قيمة d نُعوض x و y و z بإحداثيات إحدى النقط A أو B أو C

نأخذ أسهل نقطة و هي $A(0,0,1)$.

لدينا : $A(0,0,1)\,\epsilon\,(ABC)$

إذن : $0-0-1+d=0$ و منه : $d=1$

و بالتالي : المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) تصبح :

$$\boxed{(ABC) : x-y-z+1=0}$$

2 ب

لدراسة الوضع النسبي لمستوى و فلكة نستدعي $d\left(\Omega,(ABC)\right)$.

لدينا : $\Omega(1,-1,0)$ و $(ABC) : x-y-z+1=0$.

إذن : $$d\left(\Omega,(ABC)\right)=\frac{|1-(-1)-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

نلاحظ إذن أن : $d\left(\Omega,(ABC)\right)=Rayon(\mathcal{S})$

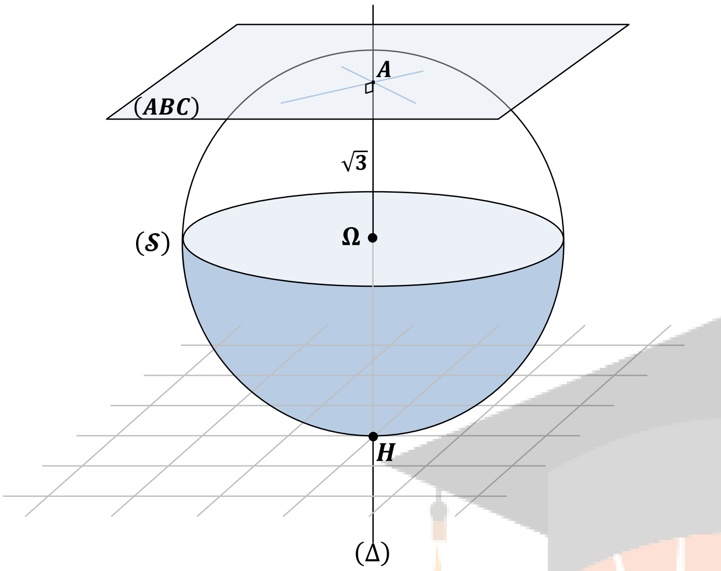
إذن (ABC) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة وحيدة و هي النقطة A .

لأن A هي النقطة المشتركة الوحيدة بين الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى (ABC) .

يعني : $A\epsilon(\mathcal{S})$ و $A\epsilon(ABC)$.

3 أ

للإجابة على هذا السؤال نستعين بالشكل التالي :



نضع : $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ و لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (Δ) .

نعلم أن (Δ) مار من Ω و عمودي على (ABC) .

إذن كل متجهة موجهة للمستقيم (Δ) تكون عمودية على المستوى (ABC) .

و من تم فإن كل متجهة موجهة للمستقيم (Δ) تكون مستقيمية مع $\vec{n}$.

لدينا : $\overrightarrow{\Omega M}$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) .

إذن : $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\vec{n}$ متجهتان مستقيميتان .

يعني : $(\exists t\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \overrightarrow{\Omega M}=t\,\vec{n}$

يعني : $(\exists t\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-0\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

أي : $(\Delta) : \begin{cases} x-1=t \\ y+1=-t\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R}) \\ z=-t \end{cases}$

يعني : $$\boxed{(\Delta) : \begin{cases} x=t+1 \\ y=-t-1\ ;\ (t\epsilon\mathbb{R}) \\ z=-t \end{cases}}$$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

3 ب

لتكن $H(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و الفلكة $(\mathcal{S})$.

إذن : $H\epsilon(\mathcal{S})$ و $H\epsilon(\Delta)$.

و لتحديد قيم المجاهيل α و β و γ نعوضها في كل من المعادلة الديكارتية للفلكة $(\mathcal{S})$ و في التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) نحصل إذن على :

$$\boxed{\begin{cases} \alpha=t+1 \\ \beta=-t-1 \qquad t\epsilon\mathbb{R} \\ \gamma=-t \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha+2\beta-1=0 \end{cases}}$$

نعوض α و β و γ بالتعابير التي تضم البارامتر t في آخر معادلة نجد :

$$(t+1)^2+(-t-1)^2+(-t)^2-2(t+1)+2(-t-1)-1=0$$

هذه الكتابة البشعة تصبح بعد النشر و التبسيط : $3t^2-3=0$

يعني : $t^2=1$ أي : $t=\pm1$

نعود إلى تعابير α و β و γ لتعويض قيمة t بـ 1 و -1 :

إذا كان : $t = 1$ فإن : $H(2,-2,-1)$

إذا كان : $t = -1$ فإن : $H(0,0,1)$ يعني : $H \equiv A$

و منه (Δ) يقطع (S) في نقطتين إحداهما A و الأخرى $H(2,-2,-1)$.

التمرين الثــــاني

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 8z + 25 = 0$

لدينا : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 25 = -36 = (6i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{8-6i}{2} = 4-3i \\ z_2 = \dfrac{8+6i}{2} = 4+3i \end{cases}$$

2 أ

لدينا الإزاحة T معرفة بما يلي :

$$\begin{aligned} T_{\overrightarrow{BC}} \ : \ (\mathcal{P}) &\mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) &\mapsto M'(z') \end{aligned}$$

ننطلق من الكتابة $T_{\overrightarrow{BC}}(A) = D$.

إذن حسب التعريف المتجهي للإزاحة نكتب : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

نترجم هذه الكتابة المتجهية باللغة العقدية نجد : $(d-a) = (c-b)$

أي : $d - (4+3i) = 10 + 3i - 4 + 3i$

إذن : $d = 10 + 9i$

2 ب

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{d-a} &= \frac{(4-3i)-(4+3i)}{(10+9i)-(4+3i)} = \frac{-6i}{6+6i} = \frac{-i}{1+i} \\ &= \frac{-i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{-1}{2}(i+1) \end{aligned}$$

2 ج

لدينا : $\dfrac{b-a}{d-a} = \dfrac{-1}{2}(i+1)$

إذن : $\arg\left(\dfrac{b-a}{d-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{-1}{2}(i+1)\right) \ [2\pi]$

يعني : $\arg\left(\dfrac{b-a}{d-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{-1}{2}\right) + \arg(i+1) \ [2\pi]$

و نعلم أن عمدة أي عدد حقيقي سالب يوافق π بترديد 2π .

يكفي الآن تحديد عمدة للعدد العقدي : $(1+i)$

لدينا :

$$\begin{aligned} (1+i) &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}} \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4} \ [2\pi]}$

و بالتالي : $\arg\left(\dfrac{b-a}{d-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{-1}{2}\right) + \arg(i+1) \ [2\pi]$

يعني : $\arg\left(\dfrac{b-a}{d-a}\right) \equiv \pi + \dfrac{\pi}{4} \ [2\pi]$

إذن : $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{5\pi}{4} \ [2\pi]$

التمرين الثــالث

1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1 \\ &= \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5}(u_n - 1) \end{aligned}$$

2 أ

لتكن (P_n) العبارة المعرفة بما يلي : $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n > 1$

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 2 > 1$

و هذا يعني أن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن العبارة (P_n) صحيحة .

يعني نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n > 1$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n - 1 > 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ \frac{1}{5}(u_n - 1) > 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} - 1 > 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} > 1$

إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

نحصل على الوضعية التالية :

$$\begin{cases} (P_0) \ est \ vraie \\ (P_n) \ implique \ (P_{n+1}) \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

إذن حسب مبدأ الترجع : (P_n) est toujours vraie

يعني : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n > 1}$

2 ب

لدراسة رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ندرس إشارة الفرق : $(u_{n+1} - u_n)$

لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}\right) - u_n \\ &= \frac{-4}{5}u_n + \frac{4}{5} = \frac{-4}{5}(u_n - 1) \end{aligned}$$

و نعلم حسب السؤال 2) أ) أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n > 1$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n - 1 > 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ \frac{-4}{5}(u_n - 1) < 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} - u_n < 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} < u_n$

و بالتالي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية .

و بما أنها مصغورة بالعدد 1 : $\left((\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n > 1\right)$.

فإنها متقاربة و سوف نحدد نهايتها بالاستعانة بالمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

YOUR WAY
طريق توجيه
جمعية توجيه وإرشاد شباب المستقبل

3 أ

لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = u_n - 1$$

لكي نبرهن على أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية عادة ما نُبيِّن أن الخارج $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ ثابت كيفما كان n من $\mathbb{N}$.

لدينا : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}-1}{u_n-1} = \frac{\frac{1}{5}(u_n-1)}{(u_n-1)} = \frac{1}{5}$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{5}$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_{n+1} = \frac{1}{5}\ v_n$

إذن : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

و منه فإن حدها العام v_n يُكتب على شكل : $v_n = v_0\left(\frac{1}{5}\right)^{n-0}$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = (u_0-1)\left(\frac{1}{5}\right)^n$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

3 ب

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ و $v_n = u_n - 1$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n - 1 = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n = 1 + \left(\frac{1}{5}\right)^n$

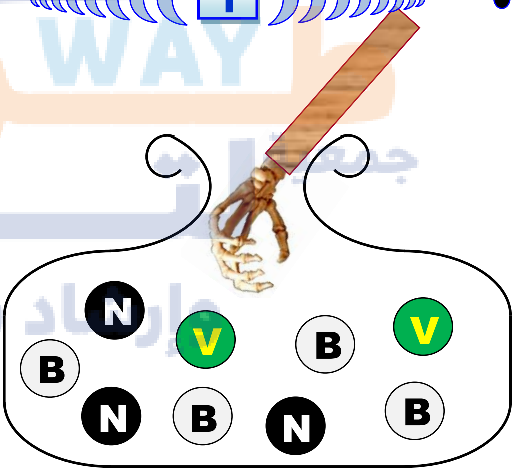
نلاحظ أن $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها عدد حقيقي موجب و أصغر من 1

إذن : $\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

و منه : $\lim_{n\infty} u_n = \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1 = 0 + 1 = 1$

التمرين الرابع

1



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث بيدقات من كيس يحتوي على تسع بيدقات فإنه توجد C_9^3 نتيجة ممكنة لهذه التجربة العشوائية .

يعني : $card(\Omega) = C_9^3 = 84$

بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

$$p(A) = p\left(\text{ثلاث بيدقات من نفس اللون}\right) = p\left(\text{ثلاث بيدقات بيضاء أو ثلاث بيدقات سوداء}\right)$$

$$= p\left(\text{ثلاث بيدقات سوداء}\right) + p\left(\text{ثلاث بيدقات بيضاء}\right)$$

$$= \frac{card\left(\text{ثلاث بيدقات سوداء}\right)}{card(\Omega)} + \frac{card\left(\text{ثلاث بيدقات بيضاء}\right)}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{C_3^3}{84} + \frac{C_4^3}{84} = \frac{1}{84} + \frac{4}{84} = \frac{5}{84}$$

$$p(B) = p\left(\text{ثلاث بيدقات مختلفة 2à2}\right) = p\left(\text{بيدقة بيضاء واحدة و بيدقة خضراء واحدة و بيدقة سوداء واحدة}\right)$$

$$= \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_4^1}{84} = \frac{3\times 2\times 4}{84} = \frac{2}{7}$$

2 أ

يحتوي الكيس على ثلاث بيدقات سوداء و ست بيدقات تخالف اللون الأسود .

إذن : عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث بيدقات من هذا الكيس فإنه يُحتَملُ :

ألا نحصل على أية بيدقة سوداء : $[X = 0]$
أو نحصل على واحدة سوداء و بيدقتين تخالفات الأسود : $[X = 1]$
أو نحصل على بيدقتين سوداوين و بيدقة ثالثة غير ذلك : $[X = 2]$
أو نحصل على ثلاث بيدق كلها سوداء : $[X = 3]$

إذن القيم التي يأخذها هذا المتغير العشوائي X هي : 0 و 1 و 2 و 3 .

أو بتعبير أجمل : $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

2 ب

الحدث $[X = 1]$ هو الحصول على بيدقة سوداء واحدة و الأخريين تخالفان اللون الأسود . إذن :

$$p[X = 1] = p\left(\text{بيدقتان تخالفان الأسود و بيدقة سوداء واحدة}\right) = \frac{C_3^1 \times C_6^2}{84}$$

$$= \frac{3\times 15}{84} = \frac{15}{28}$$

الحدث : $[X = 2]$ هو الحصول على بيدقتين سوداوين و بيدقة ثالثة تخالف اللون الأسود . إذن نحصل على :

$$p[X = 2] = p\left(\text{بيدقة تخالف الأسود و بيدقتان سوداوان}\right) = \frac{C_3^2 \times C_6^1}{84}$$

$$= \frac{3\times 6}{84} = \frac{3}{14}$$

YOUR WAY طريقكم
جمعية توجيه وإرشاد شباب المستقبل

2 ج

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق P_X المعرف على المجموعة $\{0;1;2;3\}$ نحو المجال $[0,1]$ و الذي يربط كل قيمة k من قيم X باحتمال حدوثها $p[X=k]$.

لقد حصلنا لحد الآن على : $p[X=1]=\frac{15}{28}$ و $p[X=2]=\frac{3}{14}$.

لنحسب إذن : $p[X=0]$ و $p[X=3]$.

الحدث $[X=0]$ هو الحصول على ثلاث بيدقات كلها تخالف اللون الأسود

إذن : $p[X=0]=\frac{C_6^3}{84}=\frac{20}{84}=\frac{5}{21}$

و الحدث $[X=3]$ هو الحصول على ثلاث بيدقات كلها سوداء .

إذن : $p[X=3]=\frac{C_3^3}{84}=\frac{1}{84}$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي

$$P_X \; : \; \{0;1;2;3\} \mapsto [0,1]$$
$$\begin{array}{l} 0 \mapsto P_X(0)=\frac{5}{21} \\ 1 \mapsto P_X(1)=\frac{15}{28} \\ 2 \mapsto P_X(2)=\frac{3}{14} \\ 3 \mapsto P_X(3)=\frac{1}{84} \end{array}$$

N'oubliez surtout pas la clé de control et vérifier éventuellement la chose suivante :

$$\boxed{P_X(0)+P_X(1)+P_X(2)+P_X(3)=1}$$

C'est une clé de control pour certains, certes. Mais aussi c'est une boite noire pour autrui.

التمرين الخامس

I 1

$$(2x+1)(x-1)=2x^2-2x+x-1=2x^2-x-1$$

I 2

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا : $g(x)=x^2-x-\ln x$

$$g'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$$

I 3

لدينا : $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; g'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$

و نلاحظ أن : $2x+1>0 \; ; \; (\forall x>0)$

إذن إشارة $g'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $(x-1)$.

إذا كان : $x=1$ فإن : $g'(x)=0$

إذا كان : $x>1$ فإن : $g'(x)>0$

إذا كان : $x<1$ فإن : $g'(x)<0$

و لدينا :
$$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2-x-\ln x)$$
$$=0-0-\ln 0^+=0-0-(-\infty)=+\infty$$

و لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2-x-\ln x)$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(x-1-\frac{\ln x}{x}\right)$$
$$=(+\infty)(+\infty-1-0)=+\infty$$

إذن : نلخص تغيرات الدالة g في الجدول التالي :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

من خلال هذا الجدول نلاحظ أن :

- g تناقصية على المجال $]0;1]$.
- g تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.
- و $g(1)=0$.

إذن 0 قيمة دنوية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

يعني : $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; g(x)\geq 0$

II 1 أ

لدينا :
$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2-1-(\ln x)^2)$$
$$=0^2-1-(\ln 0^+)^2$$
$$=0-1-(-\infty)^2$$
$$=0-1-(+\infty)$$
$$=(-\infty)$$

إذن نقول أن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (يعني محو الأفاصيل) مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار الصفر على اليمين .

II 1 ب

لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2-1-(\ln x)^2)$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$$
$$=(+\infty)\times(1-0-0^2)$$
$$=(+\infty)$$

و لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-1-(\ln x)^2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$$
$$=(+\infty)(1-0-0^2)$$
$$=(+\infty)$$

من النهايتين نستنتج أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

YOUR WAY
طريقكم توجيه وإرشاد شباب المستقبل

II 2 أ

ليكن x عنصرا من $]0;+\infty[$. لدينا : $f(x)=x^2-1-(\ln x)^2$

إذن :
$$f'(x)=2x-2(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)=2\left(x-\frac{\ln x}{x}\right)$$

و لدينا من جهة أخرى :
$$\frac{g(x)}{x}+1=\frac{x^2-x-\ln x}{x}+1=x-1-\frac{\ln x}{x}+1=\left(x-\frac{\ln x}{x}\right)=\frac{1}{2}f'(x)$$

إذن : $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; \left(\frac{g(x)}{x}+1\right)=\frac{1}{2}f'(x)$

II 2 ب

نعلم حسب السؤال $I)3$ أن : $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; g(x)\geq 0$

إذن : $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; 2\left(\frac{g(x)}{x}+1\right)\geq 0$

يعني : $\forall x \in]0;+\infty[\; ; \; f'(x)\geq 0$

إذن : الدالة f تزايدية على المجال $]0;+\infty[$.

و هو ما يوضحه الجدول التالي :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

II 3 أ

معادلة المماس (Δ) للمنحنى في النقطة $A(1,0)$ تُكتَبُ على الشكل التالي :
$$(\Delta) : y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

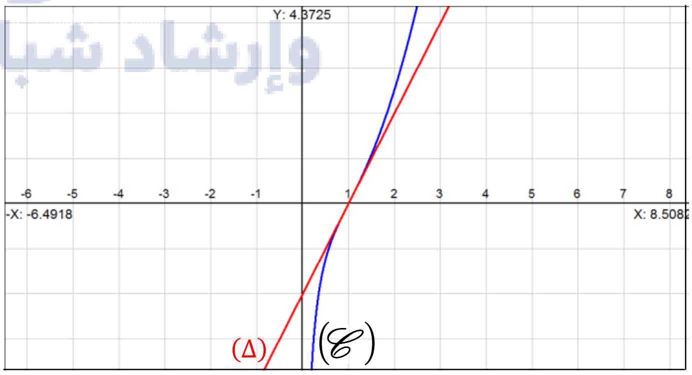
و لدينا : $f'(1)=2$ و $f(1)=0$

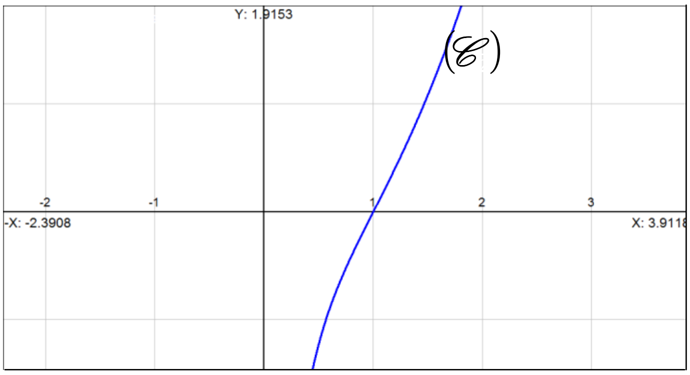
إذن المعادلة الديكارتية للمماس تصبح : $(\Delta) : y=2(x-1)+0$

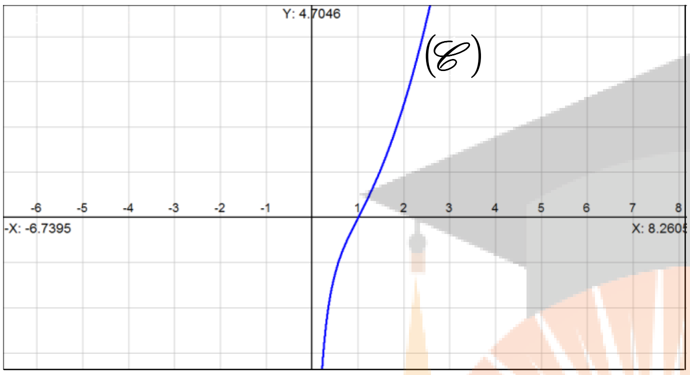
أي : $(\Delta) : y=2x-2$

II 3 ب

فيما يلي بعض الصور التذكارية للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) .







II 4 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا :
$$\begin{aligned}(x(\ln x-1))' &= 1(\ln x-1)+x(\ln x-1)' \\ &= \ln x-1+x\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \ln x-1+1=\ln x \\ &= \ln x\end{aligned}$$

إذن $x\mapsto x(\ln x-1)$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.

و سوف نستعمل هذه النتيجة لحساب التكامل : $\int_1^e \ln x \; dx$

و ذلك لأن : $[1;e] \subset]0;+\infty[$
$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x \; dx &= [x(\ln x-1)]_1^e \\ &= e(\ln e-1)-1(\ln 1-1) \\ &= e(1-1)-1(0-1) \\ &= 0-1(-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

II 4 ب

$$\begin{aligned}\int_1^e (\ln x)^2 \; dx &= \int_1^e \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{(\ln x)^2}_{v} \; dx = [uv]-\int uv' \\ &= [x(\ln x)^2]_1^e-\int_1^e x(2\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)dx \\ &= [x(\ln x)^2]_1^e-2\int_1^e \ln x \, dx \\ &= e(\ln e)^2-1(\ln 1)^2-2\times 1 \\ &= e-0-2 \\ &= e-2\end{aligned}$$

طريقك YOUR WAY
توجيه وإرشاد شباب المستقبل

II 4 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$
و محور الأفاصيل و المستقيمين : $x = 1$ و $x = e$

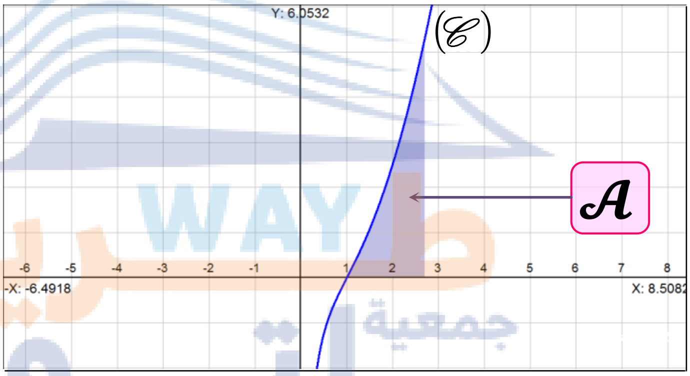
إذن : $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)|\, dx$

و لدينا f دالة تزايدية على المجال $]0; +\infty[$.

إذن :
$$x \geq 1 \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(1) \;\Rightarrow\; f(x) \geq 0 \;\Rightarrow\; |f(x)| = f(x)$$

إذن بالعودة إلى المساحة $\mathcal{A}$ نكتب :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_1^e |f(x)|\, dx = \int_1^e f(x)\, dx \\
&= \int_1^e (x^2 - 1 - (\ln x)^2)\, dx \\
&= \int_1^e x^2 dx - \int_1^e 1\, dx - \int_1^e (\ln x)^2\, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e - [x]_1^e - (e-2) \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} - e + 1 - (e-2) \\
&= \frac{e^3}{3} - 2e + \frac{8}{3} \\
&\approx 3{,}92\, (unit\acute{e})^2 \\
&\approx 3{,}92\, (1\, cm)^2 \\
&\approx 3{,}92\, cm^2
\end{aligned}$$



ملاحظة : لاحظ أنه عندما نغير وحدة المعلم . فإن المساحة $\mathcal{A}$ تتغير كما يلي

نُغير وحدة المعلم و نأخذها تساوي مثلا $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 3\, cm$.

إذن تصبح $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &\approx 3{,}92\, (unit\acute{e})^2 \\
&\approx 3{,}92\, (3\, cm)^2 \\
&\approx 3{,}92 \times 9\, cm^2 \\
&\approx 35{,}28\, cm^2
\end{aligned}$$

لذلك وجب الإنتباه إلى وحدة المعلم و كيفية استعمالها .

الإمتحانات الوطنية مع التصحيح

طريقكم YOUR WAY
جمعية لتوجيه
وإرشاد شباب المستقبل

السنة الثانية باكالوريا

تم والحمد لله تجميع جميع الإمتحانات الوطنية لمادة

الرياضيات

شعب

العلوم التجريبية

من دورة 2003 إلى دورة 2019

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

وسيتم نشر جميع التجميعات الأخرى لجميع المواد وذلك تحت إشراف جمعية طريقكم YOUR WAY المتخصصة في التوجيه المدرسي -أفاق ما بعد الباكالوريا - وذلك على الصفحة الخاصة بالجمعية على الفايسبوك

FACEBOOK.COM/ASSOCIATIONYOURWAY

06-62-84-94-52

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵡⴰⵏ
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2014

الموضوع

NS 22

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	المعامل	7

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات ومكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان) ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من أربعة تمارين و مسألة مستقلة فيما بينها و تتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الثالث	المتتاليات العددية	3 نقط
التمرين الرابع	حساب الاحتمالات	3 نقط
المسألة	دراسة دالة وحساب التكامل	8 نقط

- بالنسبة للمسألة ، ln يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري

طريقكم للتوجيه YOUR WAY جمعية وإرشاد شباب المستقبل

الموضوع

التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقط $A(0,3,1)$ و $B(-1,3,0)$ و $C(0,5,0)$ و الفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-4x-5=0$

1) أ- بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ واستنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية 0.75

ب- بين أن $2x-y-2z+5=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) 0.5

2) أ- بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(2,0,0)$ و أن شعاعها هو 3 0.5

ب- بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) 0.75

ج- حدد مثلوث إحداثيات H نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S) 0.5

التمرين الثاني : (3 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-z\sqrt{2}+2=0$ 0.75

2) نعتبر العدد العقدي $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

أ- بين أن معيار العدد u هو $\sqrt{2}$ و أن $\arg u\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ 0.5

ب- باستعمال كتابة العدد u على الشكل المثلثي ، بين أن u^6 عدد حقيقي 0.75

3) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$، النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما a و b بحيث $a=4-4i\sqrt{3}$ و $b=8$

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$

أ- عبر عن z' بدلالة z 0.5

ب - تحقق من أن B هي صورة A بالدوران R و استنتج أن المثلث OAB متساوي الأضلاع 0.5

التمرين الثالث : (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=13$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+7$ لكل n من IN

1) بين بالترجع أن $u_n<14$ لكل n من IN 0.75

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث : $v_n=14-u_n$ لكل n من IN

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم اكتب v_n بدلالة n 1

ب- استنتج أن $u_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من IN ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) 0.75

ج- حدد أصغر قيمة للعدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n>13{,}99$ 0.5

طريقكم YOUR WAY
جمعية توجيه وإرشاد شباب المستقبل
Moutamadris.ma

التمرين الرابع : (3 ن)

يحتوي كيس على تسع بيدقات لا يمكن التمييز بينها باللمس وتحمل الأعداد : 0 و 0 و 0 و 0 و 0 و 1 و 1 و 1 و 1

1) نسحب عشوائيا و في آن واحد بيدقتين من الكيس 1

ليكن A الحدث : " مجموع العددين اللذين تحملاهما البيدقتين المسحوبتين يساوي 1 "

بين أن $p(A)=\dfrac{5}{9}$

2) نعتبر اللعبة التالية : يسحب سعيد عشوائيا و في آن واحد بيدقتين من الكيس و يعتبر فائزا إذا سحب بيدقتين تحمل كل واحدة منهما العدد 1

أ- بين أن احتمال فوز سعيد هو $\dfrac{1}{6}$ 1

ب- لعب سعيد اللعبة السابقة ثلاث مرات (يعيد سعيد البيدقتين المسحوبتين إلى الكيس في كل مرة) ما هو الاحتمال لكي يفوز سعيد مرتين بالضبط ؟ 1

المسألة : (8 ن)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-\dfrac{1}{x^2}+\ln x$

1) بين أن $g'(x)=\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ و استنتج أن الدالة g تزايدية على $]0,+\infty[$ 0.5

2) تحقق من أن $g(1)=0$ ثم استنتج أن $g(x)\le 0$ لكل x من $]0,1]$ و $g(x)\ge 0$ لكل x من $[1,+\infty[$ 0.75

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=(1+\ln x)^2+\dfrac{1}{x^2}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1\,cm$)

1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ و أول هندسيا النتيجة 0.5

2) أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 0.25

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+\ln x)^2}{x}=0$ (يمكنك وضع $t=\sqrt{x}$) ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 1

ج- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ 0.25

3) أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن الدالة f تناقصية على $]0,1]$ و تزايدية على $[1,+\infty[$ 1.5

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن $f(x)\ge 2$ لكل x من $]0,+\infty[$ 1

4) أنشئ (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة تحديدها غير مطلوب) 0.75

5) نعتبر التكاملين I و J التاليين : $I=\int_1^e(1+\ln x)\,dx$ و $J=\int_1^e(1+\ln x)^2dx$

أ- بين أن $H:x\mapsto x\ln x$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto 1+\ln x$ على $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن $I=e$ 0.5

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $J=2e-1$ 0.5

ج- احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ 0.5

YOUR WAY طريقكم جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

تصحيح الإمتحان الوطني 2014

الرياضيـــــــــــــــــات

عناصر الإجابة :

تمرين 1 : (3 نقط)

1) أ) لدينا : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ إذن :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & -1 & 0\\ \vec{j} & 0 & 2\\ \vec{k} & -1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1\\ 0\end{vmatrix}$$

$$=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$$

بما أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فإن A و B و C نقط غير مستقيمية

ب) لدينا (ABC) هو المستوى المار من A والمتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية له .

إذن $M\left(x;y;z\right)\in\left(ABC\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y-3\\ z-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\ -1\\ -2\end{pmatrix}=0$$

$$2x-y-2z+5=0$$

﴿أو النقط A و B و C تحقق المعادلة $2x-y-2z+5=0$ إذن هي معادلة المستوى (ABC)﴾

2) أ) لدينا : $(x-2)^2+y^2+z^2=9=3^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-5=0$

إذن : (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega\left(2;0;0\right)$ وشعاعها R = 3

ب) لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{\left|2\times2-0-0+5\right|}{\sqrt{4+1+4}}=3$ إذن : (ABC) مماس للفلكة (S)

ج) لدينا H(a, b,c) المسقط العمودي لـ Ω على (ABC) إذن H هي تقاطع (ABC) والمستقيم المار من Ω و العمودي على (ABC)

إذن : $\exists t\in\mathbb{R}/a=2+2t\;;b=-t\;;c=-2t$ و $2a-b-2c+5=0$ $\Leftrightarrow$ t = -1

إذن H(0;1;2) .

YOUR WAY
جمعية طريقكم لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

تمريـــــن 2 : (3نقطة)

1) لدينا : ﴿ لأن : $z^2-\sqrt{2}z=(z-\frac{\sqrt{2}}{2})^2-\frac{1}{2}$ ﴾ $z^2-\sqrt{2}z+2=0 \Leftrightarrow (z-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{3}{2}=0$

$$\Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i \text{ أو } z=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$$

وبالتالي $S=\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i\}$

2) أ- لدينا : $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ومنه $|u|=\sqrt{2}\ ;\ \arg u\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

ب- لدينا : $u=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow u^6=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]^6\Rightarrow u^6=\left[\left(\sqrt{2}\right)^6;\frac{6\pi}{3}\right]\Rightarrow u^6=[16;2\pi]\Rightarrow u^6=16$

ومنه $u^6\in\mathbb{R}$

3) أ- $R(O,\frac{\pi}{3})[z)M=[(z)M') \Leftrightarrow z-'z_O=(z-z_O)\times e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\Leftrightarrow z='z\times(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

ب- لدينا : $z_A\times(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\left(4-4\sqrt{3}i\right)\times(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$$=\left(4\times\frac{1}{2}+4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(4\times\frac{\sqrt{3}}{2}-4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\right)$$

$$=8=z_B$$

ومنه : $R(O,\frac{\pi}{3})[B=[A$

لدينا : $R(O,\frac{\pi}{3})[B=[A\Rightarrow\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\left[1;\frac{\pi}{3}\right]$

إذن OAB مثلث متساوي الأضلاع .

تمريـــــن 3 : (3 نقطة)

1) من أجل n=0 لدينا : $U_0=13$ و $13<14$ إذن الخاصية تتحقق

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $U_n<14$ لنبين أن $U_{n+1}<14$

لدينا $U_n<14\Rightarrow\frac{1}{2}U_n+7<\frac{14}{2}+7$

$$\Rightarrow U_{n+1}<14$$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}:U_n<14$

YOUR WAY
طريقكم لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل
جمعية

2) أ- لدينا :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}: V_{n+1}&=14-U_{n+1}\\&=14-\frac{1}{2}U_n-7\\&=7-\frac{1}{2}U_n\\&=\frac{1}{2}(14-U_n)=\frac{1}{2}V_n\end{aligned}$$

إذن (V_n) هندسة أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_0=1$ ومنه $\forall n\in\mathbb{N}: V_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\forall n\in\mathbb{N}: V_n=14-U_n \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: U_n=14-V_n$$

ب- لدينا : $\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}: U_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

و بما ان : $-1<\frac{1}{2}<1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ و بالتالي: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=14$

$$U_n>13.99 \Leftrightarrow 14-\left(\frac{1}{2}\right)^n>13.99 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n<14-13.99$$

ج- لدينا :

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n<\ln(0.01) \Leftrightarrow -n\ln2<-2\ln10 \Leftrightarrow n>\frac{2\ln10}{\ln2}$$

ولدينا: $\frac{2\ln10}{\ln2}\simeq 6.67$ إذن **n =7** .

تمريـــن 4 : (3 نقطة)

1) كل إمكانية عبارة عن تأليفة لعنصرين من بين تسع عناصر وعددها هو $C_9^2=36$

لدينا **A" $\underbrace{10}$ "** إذن **p(A)** $=\frac{C_4^1\times C_5^1}{C_9^2}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

2) أ- نعتبر الحدث " يفوز سعيد "**G** إذن " $\underbrace{11}$ " **G** ومنه **p(G)** $=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

ب- نعتبر الحدث " يفوز سعيد مرتين بالضبط"**B** إذن " **3**حالات $\longleftarrow \underbrace{G/G/\overline{G}}$ " **B**

ومنه : **p(B)** $=C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{72}$

طريقكم لتوجيه
YOUR WAY
وارشاد شباب المستقبل

مسألة: (8 نقطة)

الجزء الأول:

1) لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: g'(x)=\frac{2x}{x^4}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}$

وبما أن : $x>0$ فإن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: g'(x)>0$ ومنه g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$

2) لدينا $g(1)=1-1+\ln 1=0$ وحيث أن g تزايدية على $\mathbb{R}_+^*$ فإن :

$0<x\le 1\Rightarrow g(x)\le g(1)\Rightarrow g(x)\le 0$ و $x\ge 1\Rightarrow g(x)\ge g(1)\Rightarrow g(x)\ge 0$

إذن :

x	**0**		**1**		$+\infty$
إشارة g(x)		**-**	**0**	**+**	

الجزء الثاني:

1) لدينا : $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ و $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

إذن : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ و منه (C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته **x = 0**

2) أ- لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب- لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}&=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(1+\ln\left(t^2\right)\right)^2}{t^2}\\&=\lim_{t\to+\infty}\frac{1+2\ln\left(t^2\right)+\left(\ln\left(t^2\right)\right)^2}{t^2}\\&=\lim_{t\to+\infty}\frac{1+4\ln(t)+4(\ln(t))^2}{t^2}\\&=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}+4\frac{\ln(t)}{t^2}+4\frac{(\ln(t))^2}{t^2}\right)\end{aligned}$$

وبما أن : $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2}=0$ و $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2}=0$ و $\lim_{t\to+\infty}\frac{(\ln(t))^2}{t^2}=0$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=0$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(1+\ln x)^2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=0$

ج لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

3 أ لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: f'(x)=\frac{2(1+\ln x)}{x}-\frac{2}{x^3}=\frac{2}{x}\left(1+\ln x-\frac{2}{x^2}\right)$

$$=\frac{2g(x)}{x}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$

ولدينا :

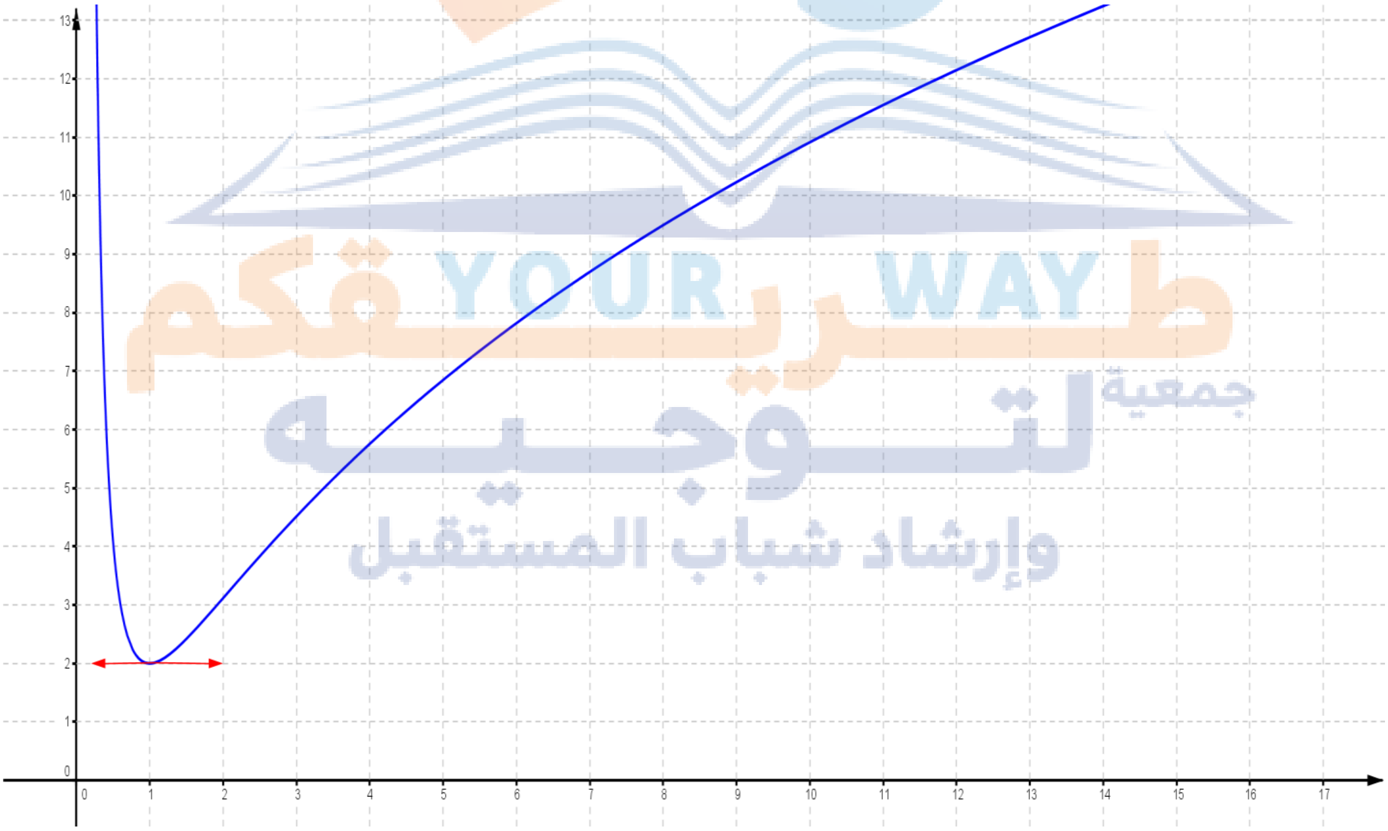
x	0		1		$+\infty$
إشارة g(x)		-	0	+	

ب لدينا :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	$-\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

لدينا 2 قيمة دنيا مطلقة للدالة f إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: f(x)\geq 2$

4 إنشاء $(\mathcal{C}_f)$:



YOUR WAY
جمعية طريقكم لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

5) أ- لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \;:\; H'(x) = \ln x + 1$

إذن : $I = \int_1^e (1+\ln x)dx = H(e) - H(1) = e$

ب- نضع : $\begin{cases} u(x) = (1+\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{2(1+\ln x)}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

إذن : $J = \left[x(1+\ln x)^2 \right]_1^e - 2\int_1^e (1+\ln x)dx$

$= 4e - 1 - 2e = 2e - 1$

ج- لدينا : $A(f) = \int_1^e |f(x)|dx \times 1cm^2 = (J - \left[\dfrac{1}{x}\right]_1^e)cm^2 = \dfrac{2e^2-1}{e}cm^2$

YOUR WAY طريقكم جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵙⵡⵓⵔⵉ
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2014

الموضوع

RS 22

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	المعامل	7

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات و مكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان)؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

مكونات الموضوع

يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها و تتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	المتتاليات العددية	3 نقط
التمرين الثالث	حساب الاحتمالات	3 نقط
التمرين الرابع	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الخامس	دراسة دالة وحساب التكامل	8 نقط

طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

الموضوع

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر،في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقطة $A(0,0,1)$ و المستوى (P) الذي معادلته $2x+y-2z-7=0$ و الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(0,3,-2)$ و شعاعها هو 3

0.5 **(1** أ- بين أن : $(t\in I\!R)$ $\begin{cases}x=2t\\ y=t\\ z=1-2t\end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من النقطة A والعمودي على (P)

0.5 ب- تحقق من أن $H(2,1,-1)$ هي نقطة تقاطع المستوى (P) والمستقيم (Δ)

0.75 **(2** أ- بين أن $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=3(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})$ حيث $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$

0.5 ب- بين أن مسافة النقطة Ω عن المستقيم (Δ) تساوي 3

0.75 ج- استنتج أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) و تحقق من أن H هي نقطة تماس المستقيم (Δ) و الفلكة (S)

التمرين الثاني (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in I\!N^*}$ المعرفة بما يلي : $u_1=5$ و $u_{n+1}=\dfrac{5u_n-4}{1+u_n}$ لكل n من $I\!N^*$

0.75 **(1** بين بالترجع أن $u_n>2$ لكل n من $I\!N^*$

(2 نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\in I\!N^*}$ المعرفة بما يلي : $v_n=\dfrac{3}{u_n-2}$ لكل n من $I\!N^*$

1 أ- بين أن $v_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{u_n-2}$ لكل n من $I\!N^*$ ثم بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in I\!N^*}$ حسابية أساسها 1

0.75 ب- اكتب v_n بدلالة n و استنتج أن $u_n=2+\dfrac{3}{n}$ لكل n من $I\!N^*$

0.5 ج- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين الثالث (3 ن)

لتحديد سؤالي اختبار شفوي خاص بمباراة توظيف، يسحب مترشح، عشوائيا ، بالتتابع و بدون إحلال بطاقتين من صندوق يحتوي على 10 بطاقات : ثمان بطاقات تتعلق بمادة الرياضيات و بطاقتان تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية (نعتبر أنه لا يمكن التمييز بين البطاقات باللمس).

1.5 **(1** نعتبر الحدث A : " سحب بطاقتين تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية "
و الحدث B : " سحب بطاقتين تتعلقان بمادتين مختلفتين "

بين أن $p(A)=\dfrac{1}{45}$ و $p(B)=\dfrac{16}{45}$

(2 ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد البطاقات المسحوبة المتعلقة بمادة اللغة الفرنسية

0.25 أ- تحقق من أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2

1.25 ب- بين أن $p(X=0)=\dfrac{28}{45}$ ثم أعط قانون احتمال X

YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الرابع (3 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+5=0$ 0.75

2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ ، النقط A و B و C و D و Ω التي ألحاقها على التوالي هي : $a=2+i$ و $b=2-i$ و $c=i$ و $d=-i$ و $\omega=1$

أ- بين أن $\dfrac{a-\omega}{b-\omega}=i$ 0.25

ب- استنتج أن المثلث ΩAB قائم الزاوية و متساوي الساقين في Ω 0.5

3) ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

أ- بين أن : $z'=iz+1-i$ 0.5

ب- تحقق من أن $R(A)=C$ و $R(D)=B$ 0.5

ج- بين أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة محددا مركزها 0.5

التمرين الخامس (8 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\left(xe^x-1\right)e^x$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $2\ cm$)

1) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و أول النتيجة هندسيا 0.75

2) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ 0.75

ب- استنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه 0.5

3) أ- بين أن $f'(x)=e^x\left(e^x-1+2xe^x\right)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم تحقق من أن $f'(0)=0$ 1

ب- بين أن $e^x-1\geq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$ و أن $e^x-1\leq 0$ لكل x من $]-\infty,0]$ 0.5

ج- بين أن الدالة f تزايدية على $[0,+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty,0]$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ 1.25

4) أ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $[0,+\infty[$ و أن $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ (نقبل أن $\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}<1$) 0.75

ب- أنشئ (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة غير مطلوب تحديدها) 0.75

5) باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx=\frac{1}{4}$ 0.75

6) احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\dfrac{1}{2}$ 1

حل التمرين 1

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

لدينا: $A\,(0; 0; 1)$ و $(P) : 2x + y - 2z - 7 = 0$

و $(S) : S\,(\Omega; 3)$ حيث $\Omega\,(0; 3; -2)$

1) أ- أبين أن: $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ **تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من A والعمودي على (P).**

لدينا: $2x + y - 2z - 7 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P)، إذن فالمتجهة التي مثلوث إحداثياتها $(2; 1; -2)$ هي متجهة منظمية على (P) وبالتالي فهي متجهة موجهة للمستقيم (Δ) العمودي على (P) والمار من النقطة $A\,(0; 0; 1)$.

ومنه فالتمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) هو:

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 0 + t \\ z = +1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

يعني أن:

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب- أتحقق من أن $H\,(2; 1; -1)$ هي نقطة تقاطع المستوى (P) والمستقيم (Δ).

بما أن (Δ) عمودي على (P) فإن (Δ) يخترق المستوى (P) في نقطة H أتأكد أن مثلوث إحداثياتها هو $(2; 1; -1)$:

ولدينا: $2 \times (2) + (1) - 2 \times (-1) - 7 = 7 - 7 = 0$

إذن $H \in (P)$

ومن أجل $t = 1$ في التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) أجد:

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$ وهي إحداثيات النقطة H.

إذن $H\,(2; 1; -1)$ هي نقطة تقاطع المستوى (P) والمستقيم (Δ).

2) أ- أبين أن: $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$

حيث $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

لدينا: $A\,(0; 0; 1)$ و $\Omega\,(0; 3; -2)$ إذن: $\overrightarrow{\Omega A}\,(0; -3; 3)$

وبما أن: $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ فإن:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} &= \left(0\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}\right) \wedge \left(2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\right) \\
&= \left(-3\vec{j} + 3\vec{k}\right) \wedge \left(2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\right) \\
&= 3\left(-\vec{j} + \vec{k}\right) \wedge \left(2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\right) \\
&= 3\left[-2\vec{j}\wedge\vec{i} - \vec{j}\wedge\vec{j} + 2\vec{j}\wedge\vec{k} + 2\vec{k}\wedge\vec{i} + \vec{k}\wedge\vec{j} - 2\vec{k}\wedge\vec{k}\right] \\
&= 3\left[2\vec{k} - \vec{0} + 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{i} - \vec{0}\right]
\end{aligned}$$

لا أنسى أن:
$\vec{i}\wedge\vec{i} = \vec{j}\wedge\vec{j} = \vec{k}\wedge\vec{k} = \vec{0}$
$\vec{i}\wedge\vec{j} = \vec{k}\ ,\ \vec{j}\wedge\vec{k} = \vec{i}$
$\vec{k}\wedge\vec{i} = \vec{j}$

إذن: $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$

ب- أبين أن مسافة النقطة Ω عن (Δ) تساوي 3.

لدينا: $\Omega\,(0; 3; -2)$ و $A\,(0; 0; 1)$ تنتمي إلى (Δ)

و $\vec{u}\,(2; 1; -2)$ متجهة موجهة لـ (Δ)

إذن:

$$\begin{aligned}
d(\Omega; (\Delta)) &= \frac{\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|} = \frac{\left\|3\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)\right\|}{\left\|2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\right\|} \\
&= \frac{|3|\left\|\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right\|}{\left\|2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\right\|} = 3\,\frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} \\
&= 3
\end{aligned}$$

ج- أستنتج أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) وأتحقق أن H هي نقطة تماس المستقيم (Δ) والفلكة (S).

- لدينا حسب نتيجة السؤال السابق: مسافة Ω مركز الفلكة (S) عن المستقيم (Δ) تساوي 3 الذي هو شعاع الفلكة، إذن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S).
- نعلم أن النقطة $H\,(2; 1; -1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ولدينا: $\overrightarrow{\Omega H}\,(2; -2; 1)$ و $\Omega H = \left\|\overrightarrow{\Omega H}\right\|$

$$= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

طريق توجيه جمعية YOUR WAY وإرشاد شباب المستقبل

بما أن H تبعد عن Ω مركز الفلكة بالمسافة 3 التي تساوي شعاع الفلكة فإن $H \in (S)$ وبالتالي فالنقطة H هي نقطة تماس الفلكة (S) والمستقيم (Δ).

حل التمرين 2

$(u_n)_{n\in IN^*}$ هي المتتالية بحيث:

$$(\forall n \in IN^*) : u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} \quad و \quad u_1 = 5$$

1) أبين بالترجع أن: $u_n > 2$ لكل n من IN^*

- من أجل $n = 1$ لدينا: $u_1 = 5 > 2$ إذن الخاصية صحيحة من أجل الحد الأول.
- نفترض أن: $u_n > 2$ من أجل $n \geq 1$ ولنبين أنها صحيحة من أجل $n + 1$:

لدينا: $$u_{n+1} - 2 = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} - 2$$

$$= \frac{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}{1 + u_n} = \frac{3u_n - 6}{1 + u_n} = \frac{3(u_n - 2)}{1 + u_n}$$

وبما أن $u_n > 2$ حسب افتراض الترجع فإن $u_n > 0$ و $u_n - 2 > 0$

وبالتالي $1 + u_n > 0$ و $u_{n+1} - 2 = \frac{3(u_n - 2)}{1 + u_n} > 0$

يعني أن: $u_{n+1} > 2$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

وبالتالي: $(\forall n \in IN^*) : u_n > 2$

2) لدينا $(v_n)_{n\in IN^*}$ المتتالية المعرفة كما يلي: $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$

أبين أن $v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$ لكل n من IN^* ثم أبين أن المتتالية $(v_n)_{n\in IN^*}$ حسابية أساسها 1.

- لكل n من IN^* لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{3}{u_{n+1} - 2}$$

$$= \frac{3}{\frac{5u_n - 4}{1 + u_n} - 2} = \frac{3}{\frac{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}{1 + u_n}}$$

إذن لكل n من IN^* لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{3}{\frac{3u_n - 6}{1 + u_n}}$$

يعني أن: $$v_{n+1} = \frac{\cancel{3}(1 + u_n)}{\cancel{3}(u_n - 2)}$$

يعني أن: $v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$ لكل n من IN^*

- لدينا لكل n من IN^*:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1 + u_n}{u_n - 2} - \frac{3}{u_n - 2}$$

$$= \frac{1 + u_n - 3}{u_n - 2}$$

$$= \frac{u_n - 2}{u_n - 2} = 1 \qquad (u_n \neq 2)$$

إذن $(v_n)_{n\in IN^*}$ متتالية حسابية أساسها 1.

ب- أكتب v_n بدلالة n وأستنتج أن: $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ لكل n من IN^*.

- لدينا: $v_1 = \frac{3}{u_1 - 2} = \frac{3}{5 - 2} = 1$ إذن $(v_n)_{n\in IN^*}$ متتالية حسابية حدها الأول $v_1 = 1$ وأساسها $r = 1$ إذن حسب صيغة الحد العام لمتتالية حسابية: لدينا

لكل n من IN^*: $v_n = v_1 + (n - 1)\,r$

يعني $v_n = 1 + (n - 1) \times 1$

إذن: لكل n من IN^*: $v_n = n$

- نعلم أن لكل n من IN^*: $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$ يعني $u_n - 2 = \frac{3}{v_n}$

إذن: $$(\forall n \in IN^*) : u_n = \frac{3}{v_n} + 2$$

يعني أن: $$(\forall n \in IN^*) : u_n = \frac{3}{n} + 2$$

ج- أحدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ وبما أن $(\forall n \in IN^*) : u_n = \frac{3}{n} + 2$

فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

حل التمرين 3

التجربة العشوائية تقتضي السحب بالتتابع وبدون إحلال لبطاقتين من صندوق يحتوي على 10 بطاقات.

1) A هو الحدث: «سحب بطاقتين تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية»

B هو الحدث: «سحب بطاقتين تتعلقان بمادتين مختلفتين»

حيث عدد بطاقات الرياضيات هو 8 وعدد بطاقات الفرنسية هو 2.

- أبين أن: $p(A) = \frac{1}{45}$ و $p(B) = \frac{16}{45}$

ـ بما أننا في حالة فرضية تساوي الاحتمالات فإن: $p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$ حيث Ω هو كون الإمكانيات في هذه التجربة العشوائية و $\text{card } \Omega = A_{10}^2 = 90$

وبما أن A هو الحدث: سحب بطاقتين للغة الفرنسية من أصل بطاقتين فإن: $\text{card } A = A_2^2 = 2$

وبالتالي لدينا: $p(A) = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$

كذلك لدينا: $p(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \frac{2 \times A_2^1 \times A_8^1}{90}$

$$= \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$$

(لأن عدد إمكانيات B هو $A_2^1 \times A_8^1$ مع أخذ بالاعتبار ترتيب البطاقتين أي الضرب في الذي هو عدد المواقع في الترتيب).

2) X هو المتغير العشوائي الذي يُعطي عدد بطاقات اللغة الفرنسية.

أـ أتحقق أن القيم التي يأخذها X هي: 0 و 1 و 2.

بما أننا نسحب بطاقتين من الصندوق وعدد بطاقات الفرنسية بداخله هو 2 فإن إمكانيات سحب بطاقة للغة الفرنسية هي:

- ـ البطاقتين المسحوبتين هما للرياضيات: في هذه الحالة X يأخذ القيمة 0.
- ـ البطاقتين مكونتين من واحدة لمادة الرياضيات والأخرى لمادة الفرنسية وفي هذه الحالة X يأخذ القيمة 1.
- ـ البطاقتين المسحوبتين هما للغة الفرنسية وهنا X يأخذ القيمة 2.

وبالتالي فالقيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي: 0 و 1 و 2

أي: $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

بـ أبين أن: $p(X=0) = \frac{28}{45}$ ثم أعطي قانون احتمال X.

- الحدث $(X=0)$ يعني أن البطاقتين المسحوبتين هي لمادة الرياضيات،

إذن: $\text{card}(X=0) = A_8^2 = 56$ وبالتالي:

$$p(X=0) = \frac{\text{card}(X=0)}{\text{card } \Omega} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45}$$

- قانون احتمال X:

لدينا: $(X=1)$ هو الحدث B (سحب بطاقتين مختلفتي المادة)

و $(X=2)$ هو الحدث A (سحب بطاقتين للغة الفرنسية)

وبالتالي فقانون احتمال X هو:

2	1	0	$X(\Omega)$
$p(X=2)=\frac{1}{45}$	$p(X=1)=\frac{16}{45}$	$p(X=0)=\frac{28}{45}$	$p(X=x_i)$

حل التمرين 4

1) أحل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$

مُميز هذه المعادلة هو: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 \times 1$

$$= 16 - 20 = -4$$

إذن: $\Delta = (2i)^2$

وحلا المعادلة هما: $z_1 = \frac{4-2i}{2}$ و $z_2 = \frac{4+2i}{2}$

أي: $z_1 = 2 - i$ و $z_2 = 2 + i$

إذن مجموعة الحلول هي: $S = \{2-i ; 2+i\}$

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى المعلم المتعامد المنظم المباشر $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

لدينا: $A(a=2+i)$ و $B(b=2-i)$ و $C(c=i)$ و $D(d=-i)$ و $\Omega(\omega=1)$

أـ أبين أن: $\frac{a-\omega}{b-\omega} = i$

لدينا: $\frac{a-\omega}{b-\omega} = \frac{2+i-1}{2-i-1}$

$$= \frac{1+i}{1-i}$$

$$= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\cancel{1}+2i-\cancel{1}}{2}$$

طريقكم YOUR WAY لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

إذن: $\frac{a-\omega}{b-\omega}=i$

ب- أستنتج أن المثلث ΩAB قائم الزاوية ومتساوي الساقين في Ω.

لدينا: $\Omega B : |b-\omega|$ و $\Omega A : |a-\omega|$

وبما أن: $\frac{a-\omega}{b-\omega}=i$ فإن: $\left|\frac{a-\omega}{b-\omega}\right|=\frac{|a-\omega|}{|b-\omega|}=|i|=1$

إذن: $|a-\omega|=|b-\omega|$ أي أن: $\Omega A=\Omega B$ (1)

من جهة أخرى نعلم أن:

$$\left(\overline{\Omega B};\overline{\Omega A}\right)\equiv\arg\left(\frac{a-\omega}{b-\omega}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\arg(i)\ [2\pi]$$
$$\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

أي أن الزاوية $\left[\widehat{A\Omega B}\right]$ قائمة (2).

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن: ΩAB مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في Ω.

3) لدينا: $M(z)$ و $M'(z')$ حيث $R(M)=M'$ و R هو الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- أبين أن: $z'=iz+1-i$

أعلم أنه حسب الصيغة العقدية للدوران R لدينا:

$$z'-\omega=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)$$

وبما أن: $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$ فإن: $z'-1=iz-i$

وبالتالي: $z'=iz+1-i$

ب- أتحقق أن: $R(A)=C$ و $R(D)=B$:

• حسب السؤال أ- لدينا: $z'=iz+1-i$ هي الصيغة العقدية للدوران R إذن:

$$ia+1-i=i(2+i)+1-i$$
$$=2i-\cancel{1}+\cancel{1}-i$$
$$=i=c$$

وهذا يعني أن: $R(A)=C$

• ولدينا كذلك:

$$id+1-i=i(-i)+1-i$$
$$=1+1-i$$
$$=2-i=b$$

وهذا يعني أن: $R(D)=B$

ج- أبين أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة، أحدد مركزها:

حسب النتيجة ب- لدينا: $R(A)=C$ إذن: $\Omega A=\Omega C$

و $R(D)=B$ إذن: $\Omega D=\Omega B$

وحسب النتيجة 2) ب- لدينا: $\Omega A=\Omega B$، نستنتج إذن أن: $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D$ وهذا يعني أن النقط A و C و D و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها Ω.

حل التمرين 5

لدينا f الدالة المعرفة على IR كمايلي: $f(x)=(xe^x-1)e^x$

(C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة 2cm)

1) أبين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ وأُأوّل النتيجة هندسياً.

• أعلم أن:

$$\lim_{x\to-\infty}xe^x=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1\times0=0$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ يعني أن المنحنى (C) يقبل المستقيم ذي المعادلة: $y=0$ كمقارب أفقي بجوار $-\infty$.

(يعني أن محور الأفاصيل هو مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار $-\infty$)

2) أبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

• لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^x-1)e^x=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^x-1)=+\infty$

• كذلك لدينا:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(e^x-\frac{1}{x}\right)e^x}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{x}\right)e^x$$

وبما أن: $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ فإن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

ب- أستنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجمياً بجوار ∞+، أحدده.

لدينا حسب نتيجة 2) أ- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

إذن المنحنى (C) يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب بجوار ∞+.

3) أ- أبين أن: $f'(x)=e^x(e^x-1+2xe^x)$ لكل x من IR

ثم أتحقق أن: $f'(0)=0$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR (جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على IR)

ولدينا:
$$(\forall x\in IR)\ ;\ f'(x)=(xe^x-1)'\,e^x+(xe^x-1)(e^x)'$$
$$=(xe^x)'\,e^x+(xe^x-1)\,e^x$$
$$=(e^x+x\,e^x)\,e^x+(xe^x-1)\,e^x$$
$$=e^x\,[e^x+x\,e^x+xe^x-1]$$

إذن: $(\forall x\in IR): f'(x)=e^x(e^x-1+2x\,e^x)$

• لدينا: $f'(0)=e^0(e^0-1+2\times0\times e^0)$
$$=1\times(1-1)=0$$

ب- أبين أن: $(\forall x\in[0,+\infty[)\ ;\ e^x-1\ge0$

و $(\forall x\in]-\infty,0])\ ;\ e^x-1\le0$

أعلم أن الدالة $x\mapsto e^x$ تزايدية على IR، إذن:

• لكل $x\ge0$ لدينا: $e^x\ge e^0$ يعني $e^x\ge1$ يعني $e^x-1\ge0$

وبالتالي: $e^x-1\ge0$ لكل $x\in[0;+\infty[$.

• لكل $x\le0$ لدينا: $e^x\le e^0$ يعني $e^x\le1$ يعني $e^x-1\le0$

وبالتالي: $e^x-1\le0$ لكل $x\in]-\infty;0]$.

ج- أبين أن الدالة f تزايدية على $[0;+\infty[$ وتناقصية على $]-\infty;0]$ ثم أضع جدول تغيرات الدالة f على IR.

• لدينا: $(\forall x\in IR): f'(x)=e^x(e^x-1+2x\,e^x)$

وحسب السؤال السابق لدينا: لكل x من $[0,+\infty[$:

$e^x-1\ge0$ و $e^x>0$ و $2x\,e^x\ge0$ إذن: $f'(x)\ge0$

وهذا يعني أن f تزايدية على $[0,+\infty[$.

- ولكل x من $]-\infty;0]$ لدينا: $e^x>0$ و $xe^x\le0$ و $e^x-1\le0$

إذن: $(e^x-1+2x\,e^x)\le0$ و $e^x>0$ أي أن: $f'(x)\le0$

وهذا يعني أن f تناقصية على المجال $]-\infty;0]$.

• جدول التغيرات على IR:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f(x)	0	↘	−1	↗	$+\infty$

4) أ- أبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في $[0;+\infty[$ وأن $\frac{1}{2}<\alpha<1$

• أعلم أن الدالة: $x\mapsto e^x$ متصلة على $[0;+\infty[$ والدالة $x\mapsto x$ متصلة على $[0;+\infty[$ إذن دالة الجذاء: $x\mapsto xe^x$ متصلة على $[0;+\infty[$ وبالتالي الدالة: $x\mapsto xe^x-1$ متصلة على $[0;+\infty[$ إذن الدالة $f: x\mapsto(xe^x-1)e^x$ متصلة على $[0;+\infty[$.

وحسب نتيجة السؤال السابق لدينا، f تزايدية قطعاً على $[0;+\infty[$ و $f([0;+\infty[)=[-1;+\infty[$.(لأن $f'\ge0$ و f' تنعدم في نقطة واحدة هي 0 على $[0;+\infty[$).

وبما أن $0\in[-1;+\infty[$ فإن 0 يقبل سابقاً وحيداً α بالدالة f في المجال $[0;+\infty[$ أي أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في $[0;+\infty[$.

• أبين أن $\frac{1}{2}<\alpha<1$: لدينا: $f(1)=(e-1)\,e>0$

و $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}-1\right)e^{\frac{1}{2}}$ وبما أن: $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}<1$ فإن $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

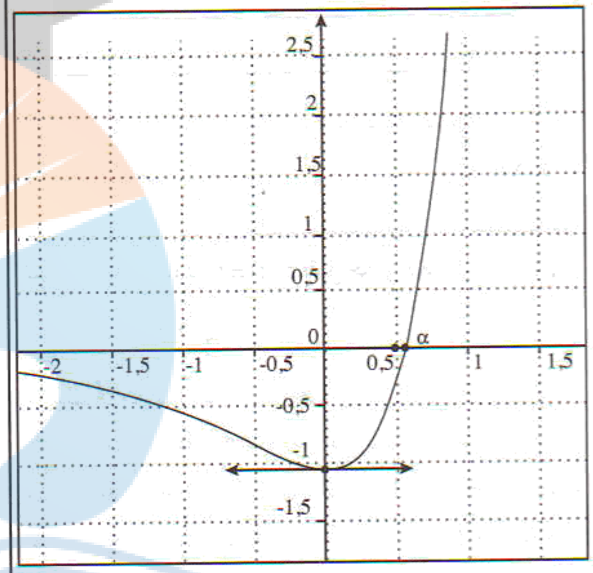
بما أن f متصلة وتزايدية قطعاً على $]0;+\infty[$ فإنها كذلك على $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

ولدينا $f\left(\frac{1}{2}\right)\times f(1)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية

فإن: $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$.

ب- إنشاء (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(تقبل وجود نقطة انعطاف وحيدة)



لدينا: $f'(0)=0$ يعني وجود مماس موازي لمحور الأفاصيل في النقطة ذات الأفصول 0.

5) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أبين أن: $\int_0^{\frac{1}{2}}x\,e^{2x}\,dx=\frac{1}{4}$

أضع: $\left(v(x)=x \text{ و } u'(x)=e^{2x}\right)$

إذن: $\left(v'(x)=1 \text{ و } u(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\right)$

ومنه: $\int_0^{\frac{1}{2}}x\,e^{2x}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}u'(x)\,v(x)\,dx$

$$=\left[u(x)\,v(x)\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}u(x)\,v'(x)\,dx$$

$$=\left[x\times\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}e-\frac{1}{4}(e-1)=\cancel{\frac{1}{4}e}-\cancel{\frac{1}{4}e}+\frac{1}{4}$$

إذن: $\int_0^{\frac{1}{2}}x\,e^{2x}\,dx=\frac{1}{4}$

6) أحسب بـ cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$.

لتكن A مساحة الحيز المطلوب، لدينا:

$$A=\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|\,dx\times(\text{الوحدة})$$

وأعلم أن: $f(x)\leq 0\ ;\ \left(\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\right)$

إذن: $|f(x)|=-f(x)$

وبالتالي: $A=-\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx\times 4\,cm^2$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}(xe^x-1)\,e^x\,dx\times 4cm^2$$

$$=\left(-\int_0^{\frac{1}{2}}xe^{2x}\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}e^x\,dx\right)\times 4cm^2$$

$$=\left(-\frac{1}{4}+\left[e^x\right]_0^{\frac{1}{2}}\right)\times 4cm^2$$

$$=\left(-\frac{1}{4}+\sqrt{e}-1\right)\times 4cm^2$$

$$=\left(4\sqrt{e}-5\right)cm^2$$

إذن: $A=\left(4\sqrt{e}-5\right)cm^2$

جمعية طريقكم لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل YOUR WAY

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵉⵍⵖ ⴰⵣⵣⵓⵍⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
- الموضوع -

NS 22

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	المعامل	7

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات ومكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان) ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين ومسألة ، مستقلة فيما بينها ، وتتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الثالث	حساب الاحتمالات	3 نقط
المسألة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل والمتتاليات العددية	11 نقطة

- بالنسبة للمسألة ، ln يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري

YOUR WAY
طريقكم
توجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقطتين $A(2,1,0)$ و $B(-4,1,0)$

1) ليكن (P) المستوى المار من النقطة A و $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ متجهة منظمية عليه . 0.5

بين أن $x+y-z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P)

2) لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ 0.75

بين أن (S) هي الفلكة التي مركزها النقطة $\Omega(-1,1,0)$ و شعاعها 3

3) أ- احسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (P) ثم استنتج أن (P) يقطع (S) وفق دائرة (C) 0.5

ب- بين أن مركز الدائرة (C) هو النقطة $H(0,2,-1)$ 0.5

4) بين أن $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$ ثم استنتج مساحة المثلث OHB 0.75

التمرين الثاني : (3 ن)

I- نعتبر العدد العقدي a بحيث $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

1) بين أن معيار العدد العقدي a هو $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 0.5

2) تحقق من أن $a=2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)+2i\sin\frac{\pi}{4}$ 0.25

3) أ- بإخطاط $\cos^2\theta$ ، حيث θ عدد حقيقي ، بين أن $1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$ 0.25

ب- بين أن $a=4\cos^2\frac{\pi}{8}+4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$ (نذكر أن $\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$) 0.5

ج- بين أن $4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ هو شكل مثلثي للعدد a ثم بين أن $a^4=\left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$ 0.5

II- نعتبر،في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$، النقطتين Ω و A اللتين لحقاهما على التوالي هما ω و a بحيث $\omega=\sqrt{2}$ و $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و R الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$

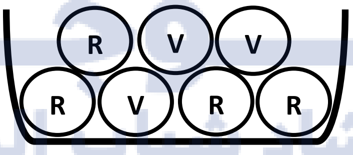
1) بين أن اللحق b للنقطة B صورة النقطة A بالدوران R هو $2i$ 0.5

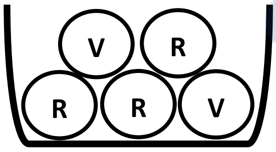
2) حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $|z-2i|=2$ 0.5

التمرين الثالث : (3 ن)

يحتوي صندوق U_1 على 7 كرات : أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

و يحتوي صندوق U_2 على 5 كرات : ثلاث كرات حمراء و كرتان خضراوان (لا يمكن التمييز بينها باللمس)





I) نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق U_1 2

ليكن الحدث A : " الحصول على كرة حمراء واحدة و كرتين خضراوين ".

و الحدث B : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون " .

بين أن $p(A)=\frac{12}{35}$ و $p(B)=\frac{1}{7}$

II) نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من U_1 ثم نسحب عشوائيا كرة واحدة من U_2 1

ليكن الحدث C : "الحصول على ثلاث كرات حمراء ".

بين أن $p(C)=\frac{6}{35}$

المسألة : (11 ن)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $2\ cm$)

I) 1) بين أن $D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$ (D_f هي مجموعة تعريف الدالة f) 0.5

2) أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} f(x)$ و أول هندسيا النتيجتين المتوصل إليهما . 0.75

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا بجوار $+\infty$ يتم تحديده . 0.5

ج- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة (لحساب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ لاحظ أن $x(1-\ln x)=x-x\ln x$) 0.5

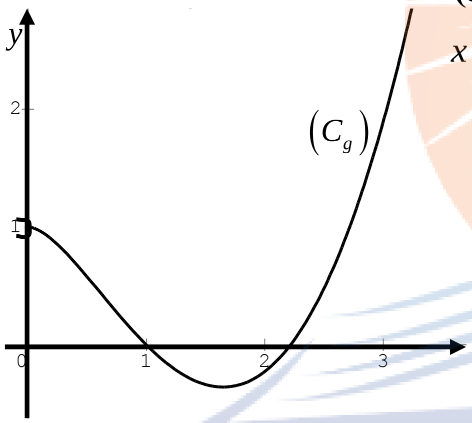
3) أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ لكل x من D_f 0.75

ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $]0,1]$ و تزايدية على كل من المجالين $[1,e[$ و $]e,+\infty[$ 1

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على D_f 0.25

II) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$

و ليكن (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم (انظر الشكل)



1) أ- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة (E) التالية : $g(x)=0$ ، $x\in]0,+\infty[$ 0.5

ب- نعطي جدول القيم التالي : 0.5

x	$2,1$	$2,2$	$2,3$	$2,4$
$g(x)$	$-0,14$	$-0,02$	$0,12$	$0,28$

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا α بحيث $2,2<\alpha<2,3$

2) أ- تحقق من أن $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ لكل x من D_f 0.25

ب- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين أفصولاهما 1 و α 0.5

ج- حدد ، انطلاقا من (C_g) ، إشارة الدالة g على المجال $[1,\alpha]$ و بين أن $f(x)-x\le0$ لكل x من $[1,\alpha]$ 0.5

3) أنشئ ، في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) 1.25

4) أ- بين أن $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x(1-\ln x)}dx=\ln 2$ (لاحظ أن : $\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ لكل x من D_f) 0.75

ب- احسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=\sqrt{e}$ 0.75

III) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $I\!N$

1) بين بالترجع أن $1\le u_n\le\alpha$ لكل n من $I\!N$ 0.5

2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال II) 2) ج-) 0.5

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها . 0.75

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا 2015 - الدورة الاستدراكية -

الشعب (ة) أو المسلك: شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

مادة الرياضيات

تمرين رقم 1

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_n=4$ و $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+3$ لكل n من IN

1- بين بالترجع أن $u_n<5$ لكل n من IN

2- تحقق من أن $u_{n+1}-u_n=\frac{3}{5}(5-u_n)$ لكل n من IN ثم استنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية .

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

4- لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث $v_n=5-u_n$ لكل n من IN

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ثم اكتب v_n بدلالة n

ب- استنتج أن $u_n=5-\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من IN و احسب نهاية المتتالية (u_n) .

تمرين رقم 2

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، المستوى (P) الذي معادلته $2x-z-2=0$ و الفلكة (S) التي معادلتها $x2+y2+z2+2x-2z-7=0$

1- بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(-1,0,1)$ و أن شعاعها هو 3

2- أ- أحسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (P)

ب- استنتج أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)

3- بين أن شعاع الدائرة (Γ) هو 2 و حدد مثلوث إحداثيات النقطة H مركز الدائرة (Γ)

تمرين رقم 3

1- أ- حل في مجموعة الأعدادالعقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+32=0$

ب- نعتبر العدد العقدي a بحيث $a=4+4i$

اكتب العدد العقدي a على الشكل المثلث ثم استنتج أن a^{12} عدد حقيقي سالب .

2- نعتبر في المستوى العقدي إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c بحيث $a=4+4i$ و $b=2+3i$ و $c=3+4i$

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- بين أن $z'=iz+7+i$

ب- تحقق من أن d لحق النقطة D صورة النقطة A بالدوران R هو $3+5i$

ج- بين أن مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $|z-3-5i|=|z-4-4i|$ هي المستقيم (BC)

YOUR WAY طريقكم
جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

تمرين رقم 4

يحتوي صندوق على 5 بيدقتان بيضاوان و بيدقتان خضروان و بيدقة حمراء واحدة (لا يمكن التمييز بين البيدقات باللمس).
نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال ثلاث بيدقات من الصندوق.

1 -ليكن A الحدث : «البيدقات الثلاث المسحوبة من نفس اللون».

- بين أن $p(A) = \dfrac{17}{125}$

2 -ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد البيدقات البيضاء المسحوبة.

- حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X.

تمرين رقم 5

I -لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - x + x\ln x$

1 -أ- بين أن $g'(x) = \ln x$ لكل x من $]0, +\infty[$

ب- بين أن الدالة g تناقصية على $]0,1]$ و تزايدية على $[1, +\infty[$

2 -أحسب $g(1)$ و استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من $]0, +\infty[$

II -نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2\ln x}{x}$
و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة : $1cm$)

1 -بين أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ و أول هندسيا النتيجة

(لحساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$ لاحظ أن $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1 - 2x\ln x}{x^2}$ لكل x من $]0, +\infty[$)

2 -بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ و استنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

3 -أ- بين أن $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0, +\infty[$

ب- أول هندسيا النتيجة $f'(1) = 0$

ج- بين أن الدالة f تزايدية على $]0, +\infty[$

4 -أنشئ، في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$، المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف أفصول إحداهما 1 و أفصول الأخرى محصور بين 2 و 2.5 و نأخذ $f(0,3) = 0$)

5 -أ- بين أن $\displaystyle\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx = 1$

ب-أحسب، ب cm^2، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$

6 -لتكن h الدالة العددية المعرفة على IR^* بما يلي : $h(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln(x^2)}{|x|}$

أ- بين أن الدالة h زوجية و أن $h(x) = f(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$

ب- أنشئ، في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$، المنحنى (C') الممثل للدالة h.

YOUR WAY
طريقكم
جمعية لتوجيه
وإرشاد شباب المستقبل

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا 2015 - الدورة الاستدراكية -

الشعب (ة) أو المسلك: شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

مادة الرياضيات

تمرين رقم 1

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_n=4$ و $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+3$ لكل n من IN

1- بين بالترجع أن $u_n<5$ لكل n من IN

2- تحقق من أن $u_{n+1}-u_n=\frac{3}{5}(5-u_n)$ لكل n من IN ثم استنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية .

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

4- لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث $v_n=5-u_n$ لكل n من IN

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ثم اكتب v_n بدلالة n

ب- استنتج أن $u_n=5-\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من IN و احسب نهاية المتتالية (u_n) .

تمرين رقم 2

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، المستوى (P) الذي معادلته $2x-z-2=0$ و الفلكة (S) التي معادلتها $x2+y2+z2+2x-2z-7=0$

1- بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(-1,0,1)$ و أن شعاعها هو 3

2- أ- أحسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (P)

ب- استنتج أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)

3- بين أن شعاع الدائرة (Γ) هو 2 و حدد مثلوث إحداثيات النقطة H مركز الدائرة (Γ)

تمرين رقم 3

1- أ- حل في مجموعة الأعدادالعقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+32=0$

ب- نعتبر العدد العقدي a بحيث $a=4+4i$

اكتب العدد العقدي a على الشكل المثلث ثم استنتج أن a^{12} عدد حقيقي سالب .

2- نعتبر في المستوى العقدي إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c بحيث $a=4+4i$ و $b=2+3i$ و $c=3+4i$

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- بين أن $z'=iz+7+i$

ب- تحقق من أن d لحق النقطة D صورة النقطة A بالدوران R هو $3+5i$

ج- بين أن مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $|z-4-4i|=|z-3-5i|$ هي المستقيم (BC)

تمرين رقم 4

يحتوي صندوق على 5 بيدقتان بيضاوان و بيدقتان خضروان و بيدقة حمراء واحدة (لا يمكن التمييز بين البيدقات باللمس). نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال ثلاث بيدقات من الصندوق .

1 -ليكن A الحدث : «البيدقات الثلاث المسحوبة من نفس اللون» .

- بين أن $p(A)=\dfrac{17}{125}$

2 -ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد البيدقات البيضاء المسحوبة .

- حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

تمرين رقم 5

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-x+x\ln x$

1 -أ- بين أن $g'(x)=\ln x$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- بين أن الدالة g تناقصية على $]0,1]$ و تزايدية على $[1,+\infty[$

2 -أحسب $g(1)$ و استنتج أن $g(x)\geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$

II-نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=3-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2\ln x}{x}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1cm$)

1 -بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ و أول هندسيا النتيجة

(لحساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ لاحظ أن $f(x)=\dfrac{3x^2-1-2x\ln x}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$)

2 -بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ و استنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

3 -أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- أول هندسيا النتيجة $f'(1)=0$

ج- بين أن الدالة f تزايدية على $]0,+\infty[$

4 -أنشئ ، في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف أفصول إحداهما 1 و أفصول الأخرى محصور بين 2 و 2.5 و نأخذ $f(0,3)=0$)

5 -أ- بين أن $\displaystyle\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx=1$

ب-أحسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$

6 -لتكن h الدالة العددية المعرفة على IR^* بما يلي : $h(x)=3-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\ln(x^2)}{|x|}$

أ- بين أن الدالة h زوجية و أن $h(x)=f(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- أنشئ، في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، المنحنى (C') الممثل للدالة h .

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا 2015 - الدورة الاستدراكية -

الشعب (ة) أو المسلك: شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

مادة الرياضيات

تمرين رقم 1

1 - لنبين بالترجع أن : $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n < 5$

من أجل $n=0$ لدينا $U_0=4$ و $4 < 5$

إذن : $U_n < 5$

نفترض أن $U_n < 5$ ولنبين أن : $U_{n+1} < 5$

لدينا :

$$U_{n+1} - 5 = \frac{2}{5}U_n + 3 - 5$$
$$= \frac{2}{5}U_n - 2$$
$$= \frac{2}{5}(U_n - 5)$$

وبما أن $U_n < 5$ فإن $U_n - 5 < 0$

ومنه $U_{n+1} - 5 < 0$ أي $U_{n+1} < 5$

وبالتالي : $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n < 5$

2 - * التحقق من المتساوية :

$$(\forall n \in IN)\ ;\ U_{n+1} - U_n = \frac{2}{5}U_n + 3 - U_n$$
$$= \left(\frac{2}{5} - 1\right)U_n + 3$$
$$= -\frac{3}{5}U_n + 3$$
$$= \frac{3}{5}(5 - U_n)$$

* استنتاج :

نعلم أن $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n < 5$

ومنه : $(\forall n \in IN)\ ;\ 5 - U_n > 0$

إذن : $(\forall n \in IN)\ ;\ U_{n+1} - U_n > 0$

وهذا يعني أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية قطعا .

3 -بما أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية و مكبورة بالعدد 5 ، فإنها متقاربة .

4 -أ- * لنبين أن $(V_n)_n$ هندسية

$$(\forall n \in IN)\ ;\ V_{n+1} = 5 - U_{n+1}$$
$$= 5 - \frac{2}{5}U_n - 3$$
$$= 2 - \frac{2}{5}U_n$$
$$= \frac{2}{5}(5 - U_n)$$
$$V_{n+1} = \frac{2}{5}.V_n$$

و منه المتتالية $(V_n)_n$ هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ وحدها الأول :

$$V_0 = 5 - U_0 = 5 - 4 = 1$$

* V_n بدلالة n :

بما أن المتتالية $(V_n)_n$ هندسية فإن :

$$(\forall n \in IN)\ ;\ V_n = V_0.q^n$$
$$(\forall n \in IN)\ ;\ V_n = 1.\left(\frac{2}{5}\right)^n$$
$$(\forall n \in IN)\ ;\ V_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

ب- استنتاج :

لدينا : $(\forall n \in IN)\ \ ;\ V_n = 5 - U_n$

و منه : $(\forall n \in IN)\ ;\ U_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$

نهاية $(U_n)_n$:

لدينا : $(\forall n \in IN)\ \ ;\ U_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$

وبما أن : $\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

لأن : $-1 < \frac{2}{5} < 1$

فإن : $\lim U_n = 5$

تمرين رقم 2

1 -لدينا : معادلة (S) هي :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$$

و منه :

$$(x+1)^2 - 1 + y^2 + (z-1)^2 - 1 - 7 = 0$$

أي :

$$(x+1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 3^2$$

و منه مركز (S) هو النقطة $\Omega(-1,0,1)$ و شعاعها هو $R=3$

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

2 -أ- حساب المسافة

$$d(\Omega,(P)) = \frac{|2x_\Omega - z_\Omega - 2|}{\sqrt{4+1}}$$

$$= \frac{|-2-1-2|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

ب- استنتاج :

لدينا : $d(\Omega,(P)) = \sqrt{5}$ و $R = 3$

وبما أن : $\sqrt{5} < 3$ (لأن $5 < 9$)

فإن : $d(\Omega,(P)) < R$

و منه المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)

3 -ليكن r شعاع الدائرة (Γ)

نعلم أن : $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega,(P))^2}$

فإن : $r = \sqrt{9-5} = 2$

* إحداثيات H مركز الدائرة (Γ)

لدينا H هي تقاطع المستوى (P) و المستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على المستوى (P) (لأن H هي المسقط العمودي ل Ω على (P))

لدينا $(P) \perp (\Delta)$ إذن (Δ) موجه بالمتجهة $\vec{n}_P(2,0,-1)$ المنظمية على (P)

و منه تمثيل بارامتري لـ (Δ) هو النظمة

$$\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 0 \qquad\qquad (k \in IR) \\ z = 1 - k \end{cases}$$

$$H \in (P) \Leftrightarrow 2x_H - z_H - 2 = 0 \quad (1)$$

$$H \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1 + 2k \\ y_H = 0 \\ z_H = 1 - k \end{cases}$$

نعوض x_H و y_H و z_H في (1) نجد :

$$-2(1+2k) - (1-k) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 + 4k - 1 + k - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5k = 5$$

$$\Leftrightarrow k = 1$$

إذن :

$$\begin{cases} x_H = -1 + 2 = 1 \\ y_H = 0 \\ z_H = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

أي : $H(1,0,0)$

تمرين رقم 3

1 -أ- حل المعادلة : $z^2 - 8z + 32 = 0$

لدينا : $\Delta = 64 - 128 = -64$

و منه : $z_1 = \dfrac{8+8i}{2} = 4 + 4i$

و $z_2 = \overline{z_1} = 4 + 4i$

و منه : $S = \{4 - 4i \, , 4 + 4i\}$

ب- * لدينا : $a = 4 + 4i$

و منه : $|a| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

إذن : $a = 4\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$a = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

إذن : $a = \left[4\sqrt{2} \, , \dfrac{\pi}{4}\right]$

* استنتاج :

$$a^{12} = \left[4\sqrt{2} \, , \frac{\pi}{4}\right]^{12}$$

$$= \left[(4\sqrt{2})^{12} ; 12\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= [2^{30} ; 3\pi] = [2^{30} ; 3]$$

$$= 2^{30}(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$= -2^{30}$$

إذن : $a^{12} \in IR^-$

2 -أ- لدينا :

$$M' = R(M) \Leftrightarrow z' - c = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - c)$$

$$\Leftrightarrow z' - c = i(z - c)$$

$$\Leftrightarrow z' = iz - ic + c$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + (1-i)c$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + (1-i)(3+4i)$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + 3 + 4i - 3i + 4$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + 7 + i$$

YOUR WAY
جمعية طريقكم لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

ب- لدينا D صورة A بالدوران R

إذن : $D = R(A) \Leftrightarrow d = ia + 7 + i$

$\Leftrightarrow d = i(4 + 4i) + 7 + i$

$\Leftrightarrow d = 4i - 4 + 7 + i$

$\Leftrightarrow d = 3 + 5i$

ج- طريقة (1) :

$|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$

$\Leftrightarrow |z - (3 + 5i)| = |z - (4 + 4i)|$

$\Leftrightarrow |z_M - z_D| = |z_M - z_A|$

$\Leftrightarrow DM = AM$

إذن المجموعة المطلوبة هي واسط القطعة $[AD]$

بما أن المثلث ACD قائم الزاوية و متساوي الساقين في C

(لأن $R(A) = D$)

فإن واسط القطعة $[AD]$ يمر من C

وبما أن : $AB = |b - a| = |-2 - i| = \sqrt{5}$

$DB = |b - d| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}$

أي : $AB = DB$

فإن واسط القطعة $[AD]$ يمر أيضا من B .

إذن واسط القطعة $[AD]$ هو المستقيم (BC) .

طريقة (2) :

نضع : $z = x + iy \quad (x \in IR \;,\; y \in IR)$

و منه : $|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$

$\Leftrightarrow |x + iy - 3 - 5i| = |x + iy - 4 - 4i|$

$\Leftrightarrow |(x - 3) + i(y - 5)| = |(x - 4) + i(y - 4)|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 5)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 4)^2}$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = (x - 4)^2 + (y - 4)^2$

$\Leftrightarrow -6x + 9 - 10y + 25 = -8x + 16 - 8y + 16$

$\Leftrightarrow 2x - 2y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0$

إذن المجموعة المطلوبة هي المستقيم (Δ) الذي معادلته هي :

$x - y + 1 = 0$

وبما أن $C \in (\Delta)$ و $B \in (\Delta)$

(نتحقق من ذلك بالإحداثيات)

فإن : $(\Delta) = (BC)$

تمرين رقم 4

ليكن Ω كون الإمكانيات

بما أن السحب بتتابع و بإحلال

فإن كل سحبة هي ترتيبة بتكرار .

و منه : $Card\Omega = 5^3 = 125$

1 - احتمال الحدث A :

لدينا : $A = \{BBB\,;VVV\,;RRR\}$

و منه : $CardA = 2^3 + 2^3 + 1^3$

$= 17$

إذن :

$$p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{17}{125}$$

2 - * قيم X :

نوع السحبات	قيمة X
$\overline{B}\,\overline{B}\,\overline{B}$	0
$\overline{B}\,\overline{B}\,B$	1
$\overline{B}\,B\,B$	2
$B\,B\,B$	3

و منه $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

* قانون احتمال X :

$$p(X = 0) = \frac{3^3}{125} = \frac{27}{125}$$

$$p(X = 1) = \frac{3.2^1.3^2}{125} = \frac{54}{125}$$

$$p(X = 2) = \frac{3.2^2.3^1}{125} = \frac{36}{125}$$

$$p(X = 3) = \frac{2^3}{125} = \frac{8}{125}$$

نتحقق بسرعة أن :

$$p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 1$$

YOUR WAY طريقك توجيه وإرشاد شباب المستقبل

تمرين رقم 5

I -

1 - أ- $\forall x \in]0,+\infty[\,;\ g'(x) = (1-x+x\ln x)'$

$$g'(x) = -1+(1+\ln x)$$
$$= \ln x$$

ب- إشارة $g'(x)$ هي إشارة $\ln x$

وبما أن $\forall x \in]0,1]\ ;\ \ln(x) \leqslant 0$

فإن : $\forall x \in]0,1]\ ;\ g'(x) \leqslant 0$

إذن g تناقصية على المجال $]0,1]$

وبما أن $\forall x \in [1,+\infty[\ ;\ \ln(x) \geqslant 0$

فإن : $\forall x \in [1,+\infty[\ ;\ g'(x) \geqslant 0$

إذن g تزايدية على المجال $[1;+\infty[$

2 - * $g(1) = 1-1+1\ln 1 = 0$

* لدينا g تقبل قيمة دنيا هي $g(1)$ على $]0;+\infty[$

إذن $\forall x \in]0,+\infty[\ ;\ g(x) \geqslant g(1)$

ومنه $\forall x \in]0,+\infty[\ ;\ g(x) \geqslant 0$

II -

1 - * $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 3-\dfrac{1}{x^2}-2\dfrac{\ln x}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} 3-\frac{1}{x^2}(1+2x\ln x)$$
$$= -\infty$$

لأن $\left(\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty\right.$ و $\left.\lim\limits_{x\to 0^+} 1+2x\ln x = 1\right)$

* هندسيا :

(C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

2 - لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3-\dfrac{1}{x^2}-2\dfrac{\ln x}{x} = 3$

(لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$)

هندسيا (C) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=3$ بجوار $+\infty$

3 - أ- لنبين أن :

$$\forall x \in]0;+\infty[\ ;\ f(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$$

لدينا : $\forall x \in]0,+\infty[\,;$

$$f'(x) = \left(3-\frac{1}{x^2}-2\frac{\ln x}{x}\right)'$$
$$= \frac{2x}{x^4}-2\frac{1-\ln x}{x^2}$$
$$= \frac{2}{x^3}-2\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$$
$$= \frac{2}{x^3}(1-x+x\ln x)$$
$$= \frac{2}{x^3}\,g(x)$$

ب- $f'(1) = \dfrac{2}{1^3}\,.\,g(1) = 0$

ومنه (C) يقبل مماسا أفقيا في النقطة التي أفصولها 1 .

ج- لدينا : $\forall x \in]0;+\infty[\ ;\ f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^3}$

وبما أن $\dfrac{2}{x^3} > 0$ و $g(x) \geqslant 0$

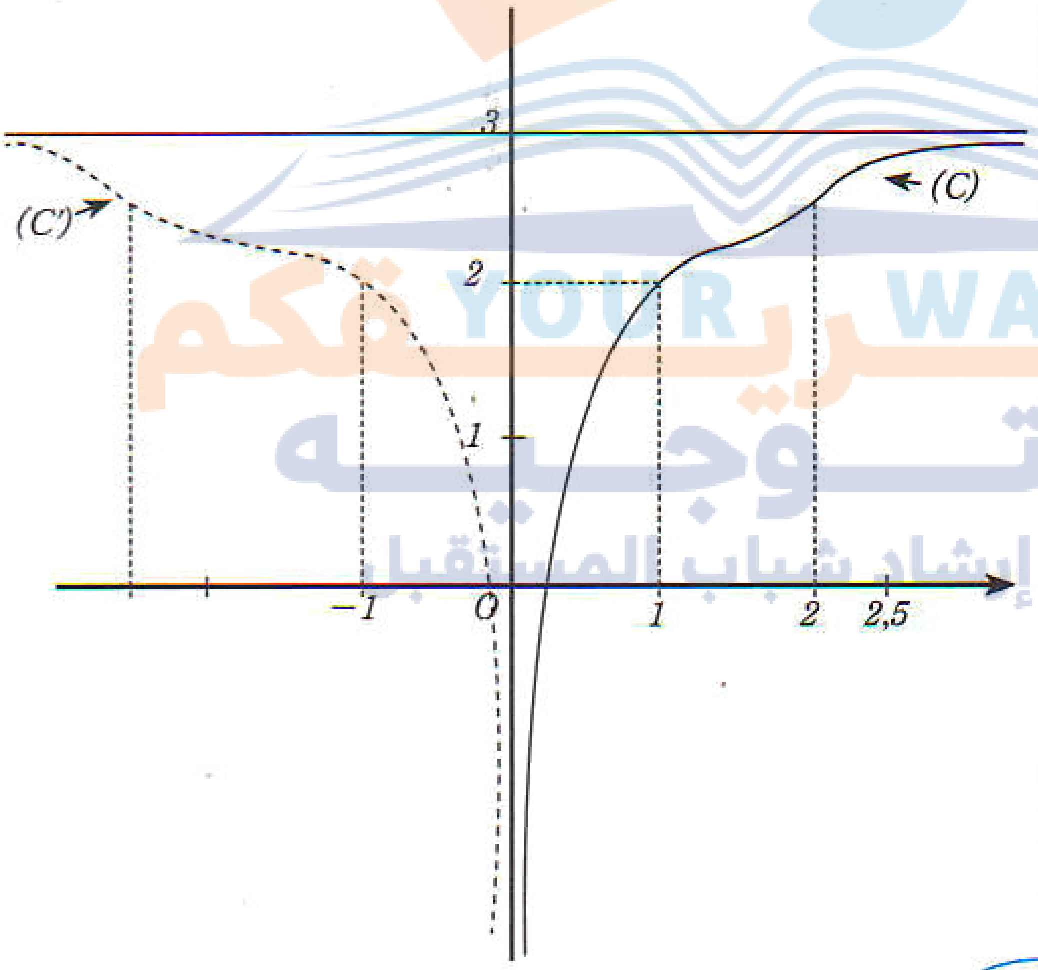
لكل x من المجال $]0;+\infty[$

فإن $\forall x \in]0;+\infty[\ ;\ f'(x) \geqslant 0$

إذن f تزايدية على $]0;+\infty[$

4 - إنشاء (C) : - جدول تغيرات f هو :

x		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		↗	3



5 -أ- لنبين أن $\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx = 1$

$$\int_1^e \frac{2\ln(x)}{x}dx = 2\int_1^e \frac{1}{x}\ln x\, dx$$
$$= 2\ln'(x).(\ln x)^1\, dx$$
$$= [\ln^2(x)]_1^e$$
$$= \ln^2(e) - \ln^2(1) = 1$$

ب- المساحة المطلوبة هي :

$$A = \int_1^e |f(x)|dx \ (ua)$$

وبما أن $\forall x \in [1,e] \ ; \ f(x) > 0$

فإن :

$$A = \int_1^e f(x)dx \ (ua)$$
$$= \int_1^e \left(3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}\right)dx \ (ua)$$
$$= \left(\int_1^e \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)dx - \int_1^e \left(\frac{2\ln x}{x}\right)dx\right) \ (ua)$$
$$A = \left(\left[3x + \frac{1}{x}\right]_1^e - 2\right) \ (ua)$$
$$= \left(3e + \frac{1}{e} - 4 - 2\right) \ (ua)$$
$$= \left(\frac{3e^2 + 1 - 6e}{e}\right)cm^2$$

6 -أ- لنبين أن الدالة h زوجية .

لدينا : لكل x من IR^* , $-x$ ينتمي إلى IR^*

ولدينا : $h(-x) = 3 - \frac{1}{(-x)^2} - \frac{\ln((-x)^2)}{|-x|}$

$$= 3 - \frac{1}{-x^2} - \frac{\ln x^2}{|x|}$$
$$= h(x)$$

ومنه المطلوب .

* لكل x من IR^{*+} لدينا $|x| = x$

و $\ln(x^2) = 2\ln x$

إذن $h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$

$$= f(x)$$

ب- إنشاء (C') منحنى h

لدينا : $\forall x \in]0, +\infty[\ ; \ h(x) = f(x)$

ومنه (C') هو (C) على المجال $]0, +\infty[$.

و h زوجية ، إذن (C') متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب .

إنشاء (C') انظر الشكل .

★★

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵉⵍⵖ ⴰⵥⵥⵓⵍⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم
والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2016

- الموضوع -

RS 22

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	المعامل	7

تعليمات عامة

- عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات ومكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان) ؛
- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من أربعة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و تتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين الأول	المتتاليات العددية	3 نقط
التمرين الثاني	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثالث	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الرابع	حساب الاحتمالات	3 نقط
مسألة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل	8 نقط

- بالنسبة للمسألة ، $\ln$ يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري.

طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{1}{16}u_n+\frac{15}{16}$ لكل n من $I\!N$

1) أ- بين بالترجع أن $u_n>1$ لكل n من $I\!N$ — 0.5

ب- تحقق من أن $u_{n+1}-u_n=-\frac{15}{16}(u_n-1)$ لكل n من $I\!N$ ثم بين أن المتتالية (u_n) تناقصية . — 0.5

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة . — 0.25

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث $v_n=u_n-1$ لكل n من $I\!N$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{16}$ و اكتب v_n بدلالة n — 1

ب- بين أن $u_n=1+\left(\frac{1}{16}\right)^n$ لكل n من $I\!N$ ثم حدد نهاية المتتالية (u_n) — 0.75

التمرين الثاني : (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقطتين $A(1,3,4)$ و $B(0,1,2)$

1) أ- بين أن $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ — 0.5

ب- بين أن $2x-2y+z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) . — 0.5

2) لتكن الفلكة (S) التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$ — 0.5

بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(3,-3,3)$ و شعاعها 5

3) أ- بين أن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S) — 0.75

ب- حدد مثلوث إحداثيات H نقطة تماس المستوى (OAB) و الفلكة (S) — 0.75

التمرين الثالث: (3 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+41=0$ — 0.75

2) نعتبر ، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$، النقط A و B و C و Ω التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c و ω بحيث $a=4+5i$ و $b=3+4i$ و $c=6+7i$ و $\omega=4+7i$

أ- احسب $\frac{c-b}{a-b}$ و استنتج أن النقط A و B و C مستقيمية . — 0.75

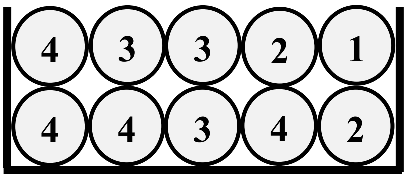
ب- ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ — 0.75

بين أن $z'=-iz-3+11i$

ج- حدد صورة النقطة C بالدوران R ثم أعط شكلا مثلثيا للعدد $\frac{a-\omega}{c-\omega}$ — 0.75

التمرين الرابع : (3 ن)

يحتوي صندوق على 10 كرات تحمل الأعداد : 1 و 2 و 2 و 3 و 3 و 3 و 4 و 4 و 4 و 4
(لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .



نعتبر التجربة التالية: نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق.

1) ليكن A الحدث : " الحصول على كرتين تحملان عددين زوجيين ". 1
بين أن : $p(A)=\frac{1}{3}$

2) نكرر التجربة السابقة ثلاث مرات بحيث نعيد الكرتين المسحوبتين إلى الصندوق بعد كل تجربة . 2
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A
بين أن $p(X=1)=\frac{4}{9}$ ثم حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X

مسألة : (8 ن)

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\frac{2}{x}-1+2\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

الجدول جانبه هو جدول تغيرات الدالة g على $]0,+\infty[$

1) احسب $g(1)$ 0.25

2) استنتج انطلاقا من الجدول أن: $g(x)>0$ لكل x من $]0,+\infty[$ 0.75

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=3-3x+2(x+1)\ln x$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $2\ cm$)

1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=-\infty$ و أعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة . 0.75

2) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (لحساب النهاية يمكنك كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x\left[\frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]$) 0.5

ب- بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$ 0.5

3) أ- بين أن $f'(x)=g(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$ 0.75

ب- استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$ 0.75

4) أ- بين أن $I(1,0)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C) 0.5

ب- بين أن $y=x-1$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة I 0.25

ج- أنشئ ، في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، المستقيم (T) و المنحنى (C) 0.75

5) أ- بين أن $\int_1^2\left(1+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{7}{4}$ 0.5

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\int_1^2(x+1)\ln x\,dx=4\ln2-\frac{7}{4}$ 0.75

ج- احسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$ 0.5

6) حل مبيانيا المتراجحة : $(x+1)\ln x\geq\frac{3}{2}(x-1)$; $x\in]0,+\infty[$ 0.5

التصحيح :

تصحيح التمرين الأول :

1) أ. لنبين بالترجع أن : $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ من أجل $n = 0$:

لدينا $u_0 = 2$

إذن $u_0 > 1$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

- نفترض أن : $u_n > 1$
- و نبين أن : $u_{n+1} > 1$

لدينا حسب الإفتراض : $u_n > 1$

إذن $\frac{1}{16}u_n > \frac{1}{16}$

إذن $\frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} > \frac{1}{16} + \frac{15}{16}$

إذن : $u_{n+1} > 1$

✓ نستنتج أن : $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب.

❖ ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - u_n \\ &= \left(\frac{1}{16} - 1\right)u_n + \frac{15}{16} \\ &= \frac{-15}{16}u_n + \frac{15}{16} \end{aligned}$$

إذن : $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$ لكل n من $\mathbb{N}$

❖ لدينا حسب نتيجة السؤال 1) أ. $u_n > 1$

إذن $u_n - 1 > 0$

إذن $\frac{-15}{16}(u_n - 1) < 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

و بالتالي المتتالية (u_n) تناقصية

طريقكم إلى التوجيه
YOUR WAY
جمعية وإرشاد شباب المستقبل

. بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة (بالعدد 1) فإن (u_n) متقاربة

(2

أ.

❖ **ليكن** $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - 1 \\ &= \frac{1}{16}u_n - \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{16}(u_n - 1) \\ &= \frac{1}{16}v_n \end{aligned}$$

إذن $v_{n+1} = \frac{1}{16}v_n$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

و منه المتتالية (v_n) **هندسية أساسها** $q = \frac{1}{16}$

و حدها الأول $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

❖ **لنكتب** v_n **بدلالة** n :

لدينا : $v_n = v_0 \times q^n$ **إذن :** $v_n = 1 \times \left(\frac{1}{16}\right)^n$

و منه $v_n = \left(\frac{1}{16}\right)^n$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

ب.

❖ **ليكن** $n \in \mathbb{N}$:

لدينا $v_n = u_n - 1$ **إذن** $u_n = v_n + 1$

و منه $u_n = \left(\frac{1}{16}\right)^n + 1$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

❖ **بما أن** $-1 < \frac{1}{16} < 1$ **فإن :** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^n = 0$

و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

YOUR WAY طريقكم
جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

تصحيح التمرين الثاني :

(1 أ. لدينا : $\overrightarrow{OA}(1,3,4)$ و $\overrightarrow{OB}(0,1,2)$

لدينا : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$

إذن : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

ب. لدينا : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(2,-2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (OAB)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) تكتب على شكل : $2.x-2.y+1.z+d=0$

و بما أن : $O(0,0,0)\in(OAB)$ فإن : $2.(0)-2.(0)+1.(0)+d=0$

إذن : $d=0$

و بالتالي معادلة للمستوى (OAB) هي : $2x-2y+z=0$

(2 لتكن الفلكة (S) التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$

لدينا : $x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$

تكافئ : $x^2-6x+y^2+6y+z^2-6z=-2$

تكافئ :

$$x^2-2(3)x+(3)^2+y^2-2(-3)y+(-3)^2+z^2-2(3)z+(3)^2=-2+(3)^2+(3)^2+(3)^2$$

تكافئ : $(x-(3))^2+(y-(-3))^2+(z-(3))^2=25=(5)^2$

إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(3,-3,3)$ و شعاعها $R=5$

(3 أ. لدينا : $d(\Omega,(OAB))=\dfrac{|2(3)-2(-3)+(3)|}{\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(1)^2}}=\dfrac{15}{3}=5$

بما أن : $d(\Omega,(OAB))=R$ فإن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S)

ب. لنحدد $H(x_H,y_H,z_H)$ نقطة تماس المستوى (OAB) و الفلكة (S)

لدينا $H(x_H,y_H,z_H)$ هي المسقط العمودي للنقطة $\Omega(3,-3,3)$ على المستوى (OAB)

و بالتالي $H(x_H,y_H,z_H)$ هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) المار من $\Omega(3,-3,3)$

و العمودي على المستوى (OAB) مع المستوى (OAB).

لدينا $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(2,-2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (OAB) و بما أن $(\Delta)\perp(OAB)$

فإن : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(2,-2,1)$ هي متجهة موجهة للمستوى (OAB). و لدينا (Δ) $\Omega(3,-3,3)\in(\Delta)$

$$(t \in \mathbb{R})\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -3-2t \\ z = 3+t \end{cases} : (\Delta)$$

$H(x_H , y_H , z_H) \in (\Delta) \cap (OAB)$ تكافئ $(t \in \mathbb{R})\begin{cases} x_H = 3+2t \\ y_H = -3-2t \\ z_H = 3+t \\ 2x_H - 2y_H + z_H = 0 \end{cases}$

بالتعويض نجد : $2(3+2t)-2(-3-2t)+(3+t)=0$

ومنه: $t=-1$

و بالتالي : $\begin{cases} x_H = 3+2(-1)=1 \\ y_H = -3-2(-1)=-1 \\ z_H = 3+(-1)=2 \end{cases}$ **أي :** $H(1,-1,2)$.

تصحيح التمرين الثالث :

1) **لنحل في** $\mathbb{C}$ **المعادلة :** $z^2-8z+41=0$

لدينا : $\Delta=(-8)^2-4(1)(41)=-100$

بما أن $\Delta<0$ **فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين**

$z=\dfrac{-(-8)-i\sqrt{100}}{2(1)}$ **أو** $z=\dfrac{-(-8)+i\sqrt{100}}{2(1)}$

$z=4+5i$ **أو** $z=4-5i$

إذن : $S=\{4-5i , 4+5i\}$

2) **أ.** **لدينا :** $\dfrac{c-b}{a-b}=\dfrac{(6+7i)-(3+4i)}{(4+5i)-(3+4i)}=\dfrac{3+3i}{1+i}=\dfrac{3(1+i)}{1+i}=3$

بما أن $\dfrac{c-b}{a-b}\in\mathbb{R}$ **فإن النقط** A **و** B **و** C **مستقيمية.**

ب. R **الدوران الذي مركزه** $\Omega(\omega)$ **و زاويته** $\dfrac{-\pi}{2}$

$M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران R

لدينا : $z'-\omega=e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}(z-\omega)$

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم

إذن : $z'-(4+7i)=-i\left(z-(4+7i)\right)$

إذن : $z'-4-7i=-i\left(z-4-7i\right)$

إذن : $z'=-i\left(z-4-7i\right)+4+7i$

إذن : $z'=-iz+4i-7+4+7i$

و منه : $z'=-iz-3+11i$

ج.

❖ لنحدد صورة النقطة C بالدوران R :

لدينا : $-ic-3+11i=-i\left(6+7i\right)-3+11i=-6i+7-3+11i=4+5i=a$

إذن : A هي صورة C بالدوران R.

❖ لدينا : $R\left(C\right)=A$ إذن : $\begin{cases}\Omega A=\Omega C\\ \left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}\right)\equiv\frac{-\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

إذن : $\begin{cases}\frac{\Omega A}{\Omega C}=1\\ \left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}\right)\equiv\frac{-\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

إذن : $\begin{cases}\left|\frac{a-\omega}{c-\omega}\right|=1\\ \arg\left(\frac{a-\omega}{c-\omega}\right)\equiv\frac{-\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

و منه : $\frac{a-\omega}{c-\omega}=1\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

تصحيح التمرين الرابع :

التجربة " نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

لدينا : $card\,\Omega=A_{10}^{2}=90$

1) A " الحصول على كرتين تحملان عددين زوجيين "

لدينا : $cardA=A_{6}^{2}=30$

إذن : $p\left(A\right)=\frac{cardA}{card\,\Omega}=\frac{30}{90}$

ومنه : $p(A)=\frac{1}{3}$

2) لدينا : X متغير عشوائي حداني وسيطاه $n=3$ و $p=p(A)=\frac{1}{3}$

$$p(X=1)=C_3^1p^1(1-p)^{3-1}=3\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

لنحدد قانون احتمال X :

$$p(X=0)=C_3^0p^0(1-p)^{3-0}=1\times1\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

$$p(X=1)=\frac{4}{9}=\frac{12}{27}$$

$$p(X=2)=C_3^2p^2(1-p)^{3-2}=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^1=\frac{2}{9}=\frac{6}{27}$$

$$p(X=3)=C_3^3p^3(1-p)^{3-3}=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^0=\frac{1}{27}$$

x_i				
	8	4 12	2 6	1

تصحيح المسألة :

I.

1) $g(1)=\frac{2}{1}-1+2\ln(1)=2-1+(2\times0)=1$

2) لدينا $g(1)$ هي القيمة الدنوية للدالة g على $]0,+\infty[$

إذن : $\forall x\in\,]0,+\infty[:g(x)\geq g(1)$

إذن : $\forall x\in\,]0,+\infty[:g(x)\geq1$

و منه : $\forall x\in\,]0,+\infty[:g(x)>0$

II.

1) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}3-3x+2(x+1)\ln(x)=-\infty$

طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3-3x = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2(x+1) = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty \end{cases}$$

التأويل الهندسي : (C) **يقبل مقارب عمودي معادلته** $x = 0$

2) أ.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} 3-3x+2(x+1)\ln x \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{3}{x}-3+2\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln x\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x}-3 = -3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

ب. لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x}-3+2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln x = +\infty$

إذن : (C) **يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار** $+\infty$

3) أ. ليكن $x \in]0,+\infty[$:

الدالة f **قابلة للإشتقاق على** $]0,+\infty[$

طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(3-3x+2(x+1)\ln(x)\right)' \\ &= -3+2\left((x+1)'\ln(x)+(x+1)\ln'(x)\right) \\ &= -3+2\left(\ln(x)+(x+1)\times\frac{1}{x}\right) \\ &= -3+2\left(\ln x+\frac{x+1}{x}\right) \\ &= -3+2\left(\ln x+1+\frac{1}{x}\right) \\ &= -3+2\ln x+2+\frac{2}{x} \\ &= \frac{2}{x}-1+2\ln x \end{aligned}$$

إذن : لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=g(x)$

ت. حسب I. 2) لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[: g(x)>0$

و منه : $\forall x\in]0,+\infty[: f'(x)>0$

و بالتالي f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) أ. ليكن $x\in]0,+\infty[$:

لدينا f' قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

طريقكم YOUR WAY جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f')'(x) \\ &= g'(x) \\ &= \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x} \\ &= \frac{-2+2x}{x^2} \\ &= \frac{2(x-1)}{x^2} \end{aligned}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

بما أن $x^2 > 0$ **فإن إشارة** $f''(x)$ **هي إشارة** $x-1$

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

لدينا : f'' **تنعدم و تغير إشارتها عند** 1 **إذن النقطة** $I(1,0)$ **هي نقطة انعطاف للمنحنى** (C).

(لاحظ $f(1) = 0$ **)**

ب. معادلة ديكارتية للمستقيم (T) **المماس للمنحنى** (C) **في النقطة** $I(1,0)$ **:**

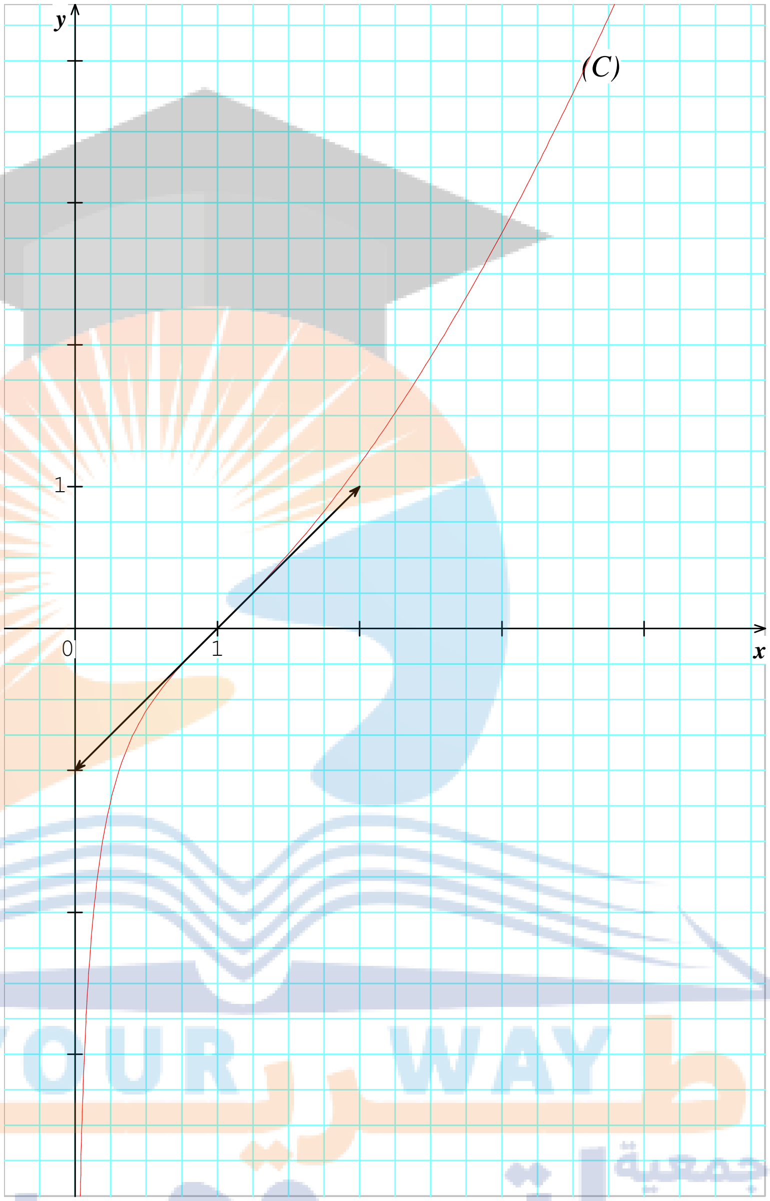
$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

لدينا : $f'(1) = g(1) = 1$ **و** $f(1) = 0$

إذن : $y = 1 \times (x-1) + 0$

و منه : $(T) : y = x - 1$

إنشاء (C) **:**



YOUR WAY
طريقكم
جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

(أ.

$$\int_1^2\left(1+\frac{x}{2}\right)dx=\left[x+\frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$=\left(2+\frac{2^2}{4}\right)-\left(1+\frac{1^2}{4}\right)$$

$$=3-\frac{5}{4}$$

$$=\frac{7}{4}$$

ب.

$$\begin{cases}u'(x)=x+1\\ v(x)=\ln x\end{cases}\quad\longleftrightarrow\quad\begin{cases}u(x)=\dfrac{x^2}{2}+x\\ v'(x)=\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

$$\int_1^2(x+1)\ln(x)dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\times\frac{1}{x}dx$$

$$=(4\ln 2)-\left(\frac{3}{2}\ln 1\right)-\int_1^2\left(1+\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=4\ln(2)-\frac{7}{4}$$

ج. لدينا : $A=\int_1^2|f(x)|dx\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$

على المجال $[1,2]$ لدينا : $f(x)\geq 0$

إذن : $A=\int_1^2 f(x)dx\times 2cm\times 2cm$

إذن : $A=\int_1^2(3-3x+2(x+1)\ln(x))dx\times 4cm^2$

إذن: $A=\left(\int_1^2(3-3x)dx+2\int_1^2(x+1)\ln(x)dx\right)\times 4cm^2$

إذن : $A=\left(\left[3x-\frac{3x^2}{2}\right]_1^2+2\left(4\ln(2)-\frac{7}{4}\right)\right)\times 4cm^2$

YOUR WAY طريقكم جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

إذن : $A=\left((0)-\left(\frac{3}{2}\right)+8\ln(2)-\frac{7}{2}\right)\times 4cm^2$

إذن : $A=\left(-5+8\ln(2)\right)\times 4cm^2$

و منه : $A=\left(-20+32\ln(2)\right)cm^2$

6) لنحل مبيانيا : $(x+1)\ln(x)\geq\frac{3}{2}(x-1)$: $x\in\left]0,+\infty\right[$

$$\begin{aligned}(x+1)\ln(x)\geq\frac{3}{2}(x-1) &\Leftrightarrow 2(x+1)\ln(x)\geq 3(x-1)\\ &\Leftrightarrow 2(x+1)\ln x\geq 3x-3\\ &\Leftrightarrow 3-3x+2(x+1)\ln x\geq 0\\ &\Leftrightarrow f(x)\geq 0\end{aligned}$$

مبيانيا $f(x)\geq 0$ تعني أن (C) يوجد فوق محور الأفاصيل

و بالتالي : $S=\left[1,+\infty\right[$

YOUR WAY طريقكم
جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

★★

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵡⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم
والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2016

- الموضوع -

NS 22

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	المعامل	7

تعليمات عامة

- عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات ومكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان) ؛
- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين ، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من أربعة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و تتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين الأول	المتتاليات العددية	2.5 نقط
التمرين الثاني	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثالث	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الرابع	حساب الاحتمالات	3 نقط
مسألة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل	8.5 نقط

- بالنسبة للمسألة ، $\ln$ يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري.

طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الأول : (2.5 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{3+u_n}{5-u_n}$ لكل n من $I\!N$

1) تحقق من أن $u_{n+1}-3=\frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ لكل n من $I\!N$ ثم بين بالترجع أن $u_n<3$ لكل n من $I\!N$ 0.75

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $v_n=\frac{u_n-1}{3-u_n}$ لكل n من $I\!N$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم استنتج أن $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $I\!N$ 0.75

ب- بين أن $u_n=\frac{1+3v_n}{1+v_n}$ لكل n من $I\!N$ ثم اكتب u_n بدلالة n 0.5

ج- حدد نهاية المتتالية (u_n) 0.5

التمرين الثاني: (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقط $A(2,1,3)$ و $B(3,1,1)$ و $C(2,2,1)$ و الفلكة (S) التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$

1) أ- بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ 0.5

ب- استنتج أن $2x+2y+z-9=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) 0.5

2) أ- بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,-1,0)$ و أن شعاعها هو 6 0.5

ب- بين أن $d(\Omega,(ABC))=3$ و استنتج أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) 0.5

3) أ- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة Ω و العمودي على المستوى (ABC) 0.5

ب- بين أن مركز الدائرة (Γ) هو النقطة B 0.5

التمرين الثالث: (3 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة : $z^2-4z+29=0$ 0.75

2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$، النقط Ω و A و B التي ألحاقها على التوالي هي ω و a و b بحيث $\omega=2+5i$ و $a=5+2i$ و $b=5+8i$

أ- ليكن u العدد العقدي بحيث $u=b-\omega$ 0.75

تحقق من أن $u=3+3i$ ثم بين أن $\arg u\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

ب- حدد عمدة للعدد العقدي $\bar{u}$ ($\bar{u}$ يرمز لمرافق العدد العقدي u) 0.25

ج- تحقق من أن $a-\omega=\bar{u}$ ثم استنتج أن $\Omega A=\Omega B$ و أن $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ 0.75

د- نعتبر الدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$ 0.5

حدد صورة النقطة A بالدوران R

طريقتكم YOUR WAY جمعية توجيه وإرشاد المستقبل

التمرين الرابع: (3 ن)

يحتوي صندوق على 10 كرات : أربع كرات حمراء و ست كرات خضراء .
(لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .
نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق .

1) ليكن A الحدث : " الكرتان المسحوبتان حمراوان " . 1
بين أن $p(A)=\frac{2}{15}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين.

أ- بين أن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي $\{2\,,3\,,4\}$ 0.5

ب- بين أن $p(X=3)=\frac{8}{15}$ ثم حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X 1.5

مسألة: (8.5 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^{x}$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1\,cm$)

1-I) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 0.25

ب- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x-2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ 0.5

2) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 0.5

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة . 0.5

3) أ- بين أن $f'(x)=2\left(e^{x}-1\right)^{2}$ لكل x من IR 0.5

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f على IR (لاحظ أن $f'(0)=0$) 0.25

ج- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1\,,\ln4[$ بحيث $f(\alpha)=0$ 0.75

4) أ- بين أن المنحنى (C_f) يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $]\ln4,+\infty[$ وتحت المستقيم (D) على المجال $]-\infty,\ln4[$ 0.5

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثيتيها هو $(0\,,-5)$ 0.5

ج- أنشئ المستقيم (D) و المنحنى (C_f) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ $\ln4\approx1,4$ و $\alpha\approx1,3$) 0.75

5) أ- بين أن $\int_{0}^{\ln4}\left(e^{2x}-4e^{x}\right)dx=-\frac{9}{2}$ 0.5

ب- احسب ، ب cm^{2} ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (D) و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته $x=\ln4$ 0.5

1-II) أ- حل المعادلة التفاضلية $(E):\ y''-3y'+2y=0$ 0.5

ب- حدد الحل g للمعادلة (E) الذي يحقق الشرطين $g(0)=-3$ و $g'(0)=-2$ 0.5

2) لتكن h الدالة العددية المعرفة على المجال $]\ln4,+\infty[$ بما يلي : $h(x)=\ln\left(e^{2x}-4e^{x}\right)$

أ- بين أن الدالة h تقبل دالة عكسية h^{-1} و أن h^{-1} معرفة على IR 0.75

ب- تحقق من أن $h(\ln5)=\ln5$ ثم حدد $\left(h^{-1}\right)'(\ln5)$ 0.75

التصحيح :

تصحيح التمرين الأول :

(1

- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}-3 &= \frac{3+u_n}{5-u_n}-3 \\ &= \frac{3+u_n-15+3u_n}{5-u_n} \\ &= \frac{4u_n-12}{5-u_n} \\ &= \frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)} \end{aligned}$$

إذن : $u_{n+1}-3=\frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$

-

✓ من أجل $n=0$: لدينا $u_0=2$ إذن $u_0<3$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

- نفترض أن : $u_n<3$
- و نبين أن : $u_{n+1}<3$

لدينا $u_{n+1}-3=\frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$

و حسب الإفتراض لدينا : $u_n<3$

إذن $u_n-3<0$ و $3-u_n>0$

إذن : $\frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}<0$

جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل YOUR WAY طريقكم

و منه $u_{n+1}-3<0$

و بالتالي $u_{n+1}<3$

✓ نستنتج أن $u_n<3$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) أ- ليكن $n\in\mathbb{N}$:

-

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{3-u_{n+1}} \\ &= \frac{\frac{3+u_n}{5-u_n}-1}{\frac{4(3-u_n)}{5-u_n}} \\ &= \frac{\frac{3+u_n-5+u_n}{5-u_n}}{\frac{4(3-u_n)}{5-u_n}} \\ &= \frac{2u_n-2}{4(3-u_n)} \\ &= \frac{2(u_n-1)}{4(3-u_n)} \\ &= \frac{1}{2}\times v_n \end{aligned}$$

إذن $v_{n+1}=\frac{1}{2}\times v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{3-u_0}=\frac{2-1}{3-2}=1$

- لدينا : $v_n=v_0\times q^n$

إذن $v_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و منه $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

▪

$$v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n} \Leftrightarrow u_n - 1 = (3 - u_n)v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n - 1 = 3v_n - u_n v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n + u_n v_n = 1 + 3v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n(1 + v_n) = 1 + 3v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$$

إذن : $u_n = \dfrac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

▪ و بما أن $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ فإن $u_n = \dfrac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

ج- بما أن $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{1}{1}$ و منه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

تصحيح التمرين الثاني

1) **أ-** لدينا $\overrightarrow{AB}(1,0,-2)$ و $\overrightarrow{AC}(0,1,-2)$

إذن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

ب- لدينا : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $(2)x+(2)y+(1)z+d=0$

و بما أن $A(2,1,3)\in(ABC)$ فإن $(2)(2)+(2)(1)+(1)(3)+d=0$ أي $d=-9$

وبالتالي : $2x+2y+z-9=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

2) أ- __طريقة 1:__

$$M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+2y+z^2=34$$
$$\Leftrightarrow {}^2-2\quad+\quad+\quad{}^2+2\quad+\quad+\quad{}^2=34+\quad+$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=36$$
$$\Leftrightarrow (\quad-(\ ))^2+(\quad-(\quad))^2+(\quad-(\ ))^2=(\ )^2$$

إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,-1,0)$ و أن شعاعها هو 6

__طريقة 2:__ معادلة الفلكة الفلكة (S) هي : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$

لدينا : $\begin{cases}\dfrac{-\alpha}{2}=\dfrac{-(-2)}{2}=1\\ \dfrac{-\beta}{2}=\dfrac{-(2)}{2}=-1\\ \dfrac{-\gamma}{2}=\dfrac{-(0)}{2}=0\end{cases}$ إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,-1,0)$

و لدينا : $R=\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta}}{2}=\dfrac{\sqrt{(-2)^2+(2)^2+(0)^2-4(-34)}}{2}=\dfrac{\sqrt{144}}{2}=\dfrac{12}{2}=6$

إذن شعاع الفلكة (S) هو 6

ب- لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|2(1)+2(-1)+(0)-9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{9}}=\dfrac{9}{3}=3$

بما أن $d(\Omega,(ABC))<R$ ($R=6$ شعاع الفلكة (S))

طريقكم لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل
YOUR WAY
جمعية

المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) :

3) أ- لنحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من $\Omega(1,-1,0)$ و العمودي على المستوى (ABC)

بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) و بما أن (Δ) عمودي على المستوى (ABC)

فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ هي متجهة موجهة للمستوى (ABC)

و لدينا $\Omega(1,-1,0)\in(\Delta)$

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو : $(t\in\mathbb{R})$

$$\begin{cases} x=(1)+t(2) \\ y=(-1)+t(2) \\ z=(0)+t(1) \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

أي : $(t\in\mathbb{R})$

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

ب- ليكن $H(x_H,y_H,z_H)$ مركز الدائرة (Γ) (H هو المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (ABC))

$$H(x_H,y_H,z_H)\in(\Delta)\cap(ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H-1+2t \\ z_H=t \\ 2x_H+2y_H+z_H-9=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H-1+2t \\ z_H=t \\ 2(1+2t)+2(-1+2t)+(t)-9=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H-1+2t \\ z_H=t \\ t=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_H = 3 \\ y_H = 1 \\ z_H = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

و منه النقطة H هي B

و بالتالي : مركز الدائرة (Γ) هو النقطة B.

تصحيح التمرين الثالث

1) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+29=0$

لدينا : $\Delta=(-4)^2-4(1)(29)=-100$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$z=\dfrac{-(-4)-i\sqrt{100}}{2(1)}$ أو $z=\dfrac{-(-4)+i\sqrt{100}}{2(1)}$

$z=\dfrac{4-10i}{2}$ أو $z=\dfrac{4+10i}{2}$

$z=2-5i$ أو $z=2+5i$

إذن : $S=\{2-5i,2+5i\}$

2) أ-

- لدينا $u=b-\omega=(5+8i)-(2+5i)=5+8i-2-5i=3+3i$

  إذن $u=3+3i$
- لدينا $|u|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

✓ $u=3\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

إذن $\arg u\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

ب- نعلم أن $\arg\bar{u}\equiv-\arg u\,[2\pi]$ إذن $\arg\bar{u}\equiv-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

ج-

- $a-\omega=(5+2i)-(2+5i)=5+2i-2-5i=3-3i=\overline{3+3i}=\bar{u}$
- بما أن : $a-\omega=\bar{u}$ فإن $|a-\omega|=|\bar{u}|$

و نعلم أن $|\bar{u}|=|u|$ إذن $|a-\omega|=|u|$ و منه $|a-\omega|=|b-\omega|$

$$\Omega A=\Omega B$$

- لدينا $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\arg\left(\frac{u}{\overline{u}}\right)[2\pi]$

إذن $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\arg(u)-\arg\overline{u}\,[2\pi]$

إذن $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\frac{\pi}{4}-\left(\frac{-\pi}{4}\right)[2\pi]$

و منه $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

د- نعتبر الدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$

لنحدد صورة النقطة A بالدوران R

طريقة 1:

بما أن $\begin{cases}\Omega A=\Omega B\\ \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ فإن $\begin{cases}\Omega A=\Omega B\\ \left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ و منه $R(A)=B$

طريقة 2 :

الكتابة العقدية للدوران R هي $z'-\omega=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)$

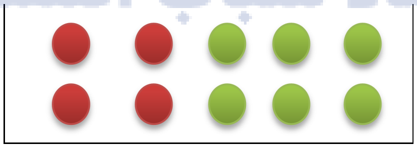
إذن $z'-(2+5i)=i\left(z-(2+5i)\right)$ أي : $z'=iz+7+3i$

لنحدد صورة النقطة A بالدوران R

$$z'=ia+7+3i=i(5+2i)+7+3i=5i-2+7+3i=5+8i=b$$

و منه صورة النقطة A بالدوران R هي النقطة B

تصحيح التمرين الرابع



التجربة " نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة .

$$card\,\Omega = C_{10}^{2} = 45$$

1) ليكن A الحدث : " الكرتان المسحوبتان حمراوان " .

لدينا $cardA = C_4^2 = 6$ إذن $p(A) = \frac{cardA}{card\,\Omega} = \frac{6}{45}$ و منه : $p(A) = \frac{2}{15}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين

أ. لنحدد القيم التي يأخذها X :

- إذا سحبنا كرتين حمراوتين من الصندوق فإنه يتبقى لنا كرتين حمراوتين في الصندوق إذن $X = 2$
- إذا سحبنا كرة حمراء و كرة خضراء فإنه يتبقى لنا ثلاث كرات حمراء في الصندوق إذن $X = 3$
- إذا سحبنا كرتين خضراوتين فإنه يتبقى لنا أربع كرات حمراء في الصندوق إذن $X = 4$

إذن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي $\{2,3,4\}$

ب.

- $p(X = 3) = \frac{C_4^1 \times C_6^1}{45} = \frac{4\times 6}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$
- لنحدد قانون احتمال X :

✓ $p(X = 2) = p(A) = \frac{2}{15}$

✓ $p(X = 3) = \frac{8}{15}$

✓ $p(X = 4) = \frac{C_6^2}{45} = \frac{15}{45} = \frac{5}{15}$

x_i			
$p\ X\ \ x$	$\underline{2}$	$\underline{8}$	$\underline{5}$

تصحيح المسألة :

I. **(1** أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x - 2 + e^{2x} - 4e^{x} = -\infty$

لأن :
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-2=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -4e^{x}=0\end{cases}$$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(2x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}-4e^{x}=0$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x-2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

2) أ- لدينا **:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2+e^{2x}-4e^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2+e^{x}\left(e^{x}-4\right)=+\infty$

لأن :
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}-4=+\infty\end{cases}$$

ب-

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{x}+\dfrac{e^{2x}-4e^{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{x}+\dfrac{e^{x}}{x}\left(e^{x}-4\right)=+\infty$

لأن :
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{x}=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}-4=+\infty\end{cases}$$

- بما أن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty\end{cases}$ فإن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

YOUR WAY
طريقكم
جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

3) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لدينا : $f'(x)=\left(2x-2+e^{2x}-4e^{x}\right)'=2+2e^{2x}-4e^{x}=2\left(e^{2x}-2e^{x}+1\right)$

إذن : $f'(x)=2\left(e^{x}-1\right)^{2}$ **لكل** x **من** $\mathbb{R}$

ب- لدينا $f'(x)\geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ و $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗			$+\infty$

ج- لنبين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1,\ln 4[$ بحيث $f(\alpha)=0$

✓ f متصلة على $[1,\ln 4]$

✓ f تزايدية قطعا على $[1,\ln 4]$

✓ لدينا : $\begin{cases} f(1)=e^2-4e=e(e-4) \\ f(\ln 4)=2\ln(4)-2=2(\ln(4)-1) \end{cases}$ إذن $f(1)\times f(\ln 4)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1,\ln 4[$ بحيث $f(\alpha)=0$

4) **أ-** ليكن $x\in\mathbb{R}$

لدينا : $f(x)-(2x-2)=e^{2x}-4e^{x}=e^{x}(e^{x}-4)$

بما أن : $e^{x}>0$ فإن إشارة $f(x)-(2x-2)$ هي إشارة $e^{x}-4$

لدينا : $e^{x}-4=0 \Leftrightarrow x=\ln 4$

- على المجال $]\ln 4,+\infty[$: $x>\ln 4$

إذن $e^{x}>4$

إذن $e^{x}-4>0$

إذن $f(x)-(2x-2)>0$

و منه (C_f) يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $]\ln 4,+\infty[$

- على المجال $]-\infty,\ln 4[$: $x<\ln 4$

إذن $e^{x}<4$

إذن $e^{x}-4<0$

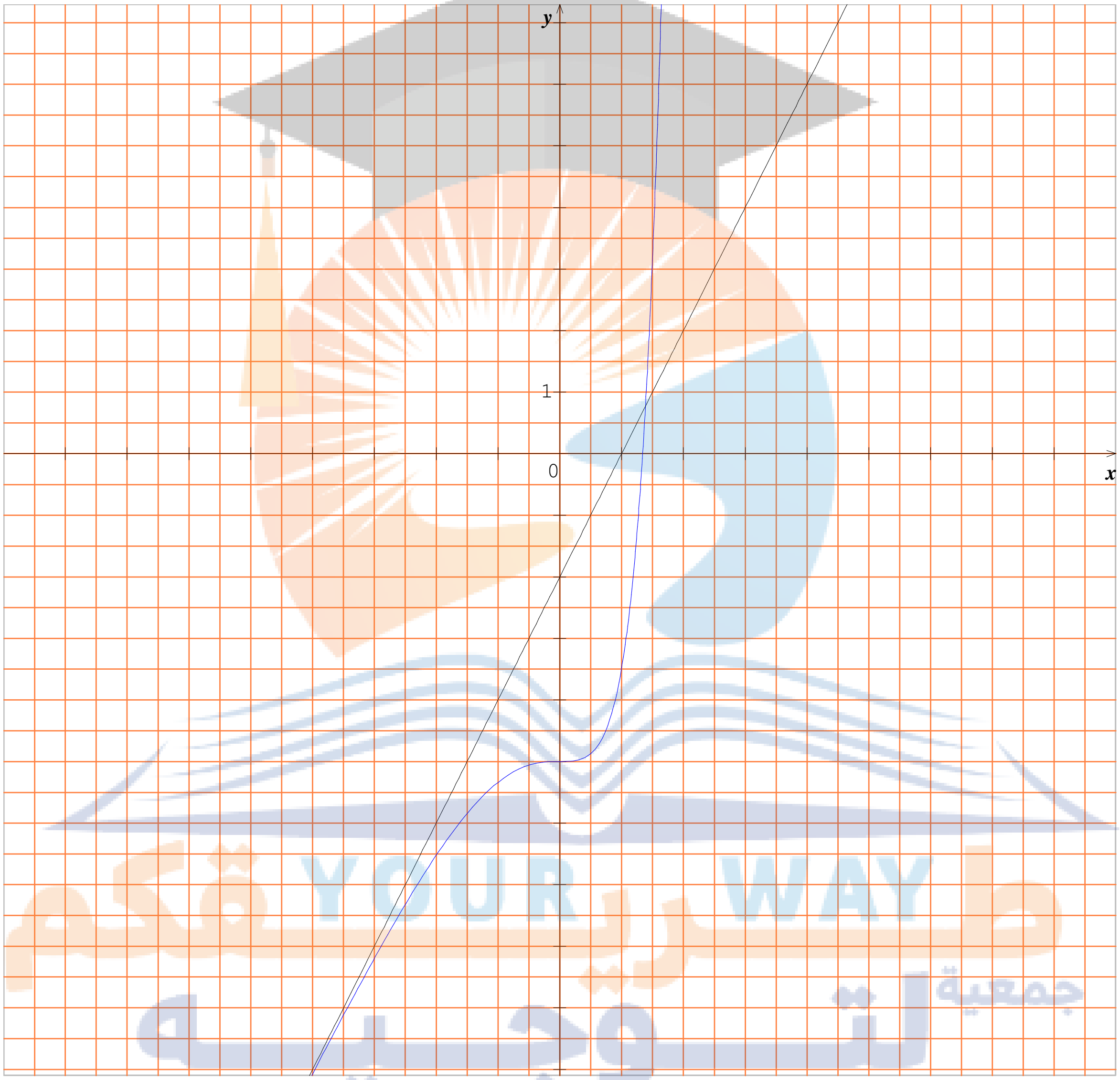
إذن $f(x)-(2x-2)<0$

و منه (C_f) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $]-\infty,\ln 4[$

ب- بما أن $f\,'$ تنعدم و لا تغير إشارتها عند العدد 0 فإن النقطة التي زوج إحداثيتيها $(0,f(0))$ هي نقطة انعطاف

و منه المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثيتيها هو $(0,-5)$

ج-



5) أ-

$$\int_0^{\ln 4}\left(e^{2x}-4e^{x}\right) \qquad =\left[\frac{1}{2}e^{2x}-4e^{x}\right]_0^{\ln 4}$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 4}-e^{\ln 4}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{2(0)}-4e^{0}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\times 16-4\times 4\right)-\left(\frac{1}{2}-4\right)$$

$$=8-16-\frac{1}{2}+4$$

$$=-\frac{9}{2}$$

ب- لنحسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (D) و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته $x=\ln 4$:

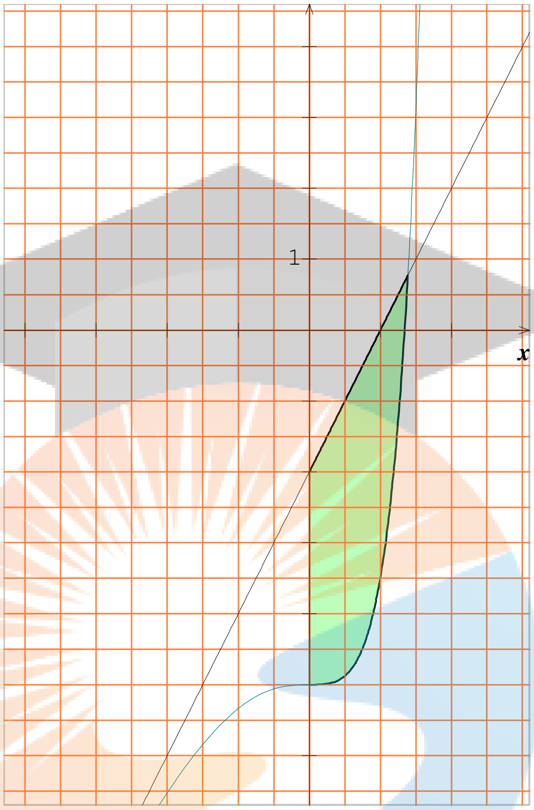
$$A=\int_0^{\ln 4}\left|f(x)-(2x-2)\right|dx\times\left\|\vec{i}\right\|\times\left\|\vec{j}\right\|$$

بما أن : على المجال $[0,\ln 4]$: $f(x)-(2x-2)\leq 0$ فإن :

$$A=\int_0^{\ln 4}\left((2x-2)-f(x)\right)dx\times 1cm\times 1cm$$

إذن $A=\int_0^{\ln 4}-\left(e^{2x}-e^{x}\right)dx.cm^2$

و منه $A=\frac{9}{2}.cm^2$



طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد الشباب للمستقبل

II■ 1) أ- لنحل المعادلة التفاضلية $(E): y''-3y'+2y=0$

المعادلة المميزة : $r^2-3r+2=0$

لدينا $\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=1$

إذن حلي المعادلة هما : $r_1=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2(1)}=1$ و $r_2=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2(1)}=2$

مجموعة حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$y : x \mapsto \alpha e^{r_1 x}+\beta e^{r_2 x} \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

أي :

$$y : x \mapsto \alpha e^{x}+\beta e^{2x} \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

ب- لنحدد الحل g للمعادلة (E) الذي يحقق الشرطين $g(0)=-3$ و $g'(0)=-2$

- g حل للمعادلة (E) إذن $g(x)=\alpha e^{x}+\beta e^{2x} \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

(حيث α و β سيتم تحديدهما)

- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R})\quad g'(x)=\alpha e^{x}+2\beta e^{2x}$
- لدينا : $$\begin{cases} g(0)=-3 \\ g'(0)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-3 \\ \alpha+2\beta=-2 \end{cases}$$

إذن $\alpha=-4$ و $\beta=1$

و منه : $(\forall x \in \mathbb{R})\quad g(x)=(-4)e^{x}+(1)e^{2x}$

أي : $(\forall x \in \mathbb{R})\quad g(x)=e^{2x}-4e^{x}$

2) لتكن h الدالة العددية المعرفة على المجال $]\ln 4,+\infty[$ بما يلي :

$$h(x)=\ln\left(e^{2x}-4e^{x}\right)=\ln\left(g(x)\right)=\ln\left(f(x)-(2x-2)\right)$$

أ-

- لدينا h متصلة على $]\ln 4,+\infty[$

(لأن الدالة g متصلة على $]\ln 4,+\infty[$ و $\left(\forall x \in]\ln 4,+\infty[\right): g(x)>0$)

- الدالة h قابلة للإشتقاق على $]\ln 4,+\infty[$

ليكن $x \in]\ln 4,+\infty[$:

$$h'(x)=\left(\ln\left(e^{2x}-4e^{x}\right)\right)'=\frac{\left(e^{2x}-4e^{x}\right)'}{e^{2x}-4e^{x}}=\frac{2e^{2x}-4e^{x}}{e^{2x}-4e^{x}}=\frac{2\left(e^{x}-2\right)}{e^{x}-4}$$

على المجال $]\ln 4,+\infty[$: لدينا $e^{x}-4>0$ و $e^{x}-2>0$

إذن $\left(\forall x \in]\ln 4,+\infty[\right): h'(x)>0$

و منه الدالة h تزايدية قطعا على $]\ln 4,+\infty[$

بما أن h متصلة وتزايدية قطعا على $]\ln 4,+\infty[$ فإن h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة من مجال J نحو $]\ln 4,+\infty[$

حيث : $$J=h\left(]\ln 4,+\infty[\right)=\left]\lim_{x\to \ln 4^{+}} h(x),\lim_{x\to +\infty} h(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$$

لأن : $$\lim_{x\to \ln 4^{+}} h(x)=\lim_{x\to \ln 4^{+}} \ln\left(e^{2x}-4e^{x}\right)=\lim_{t\to 0^{+}} \ln(t)=-\infty$$

و $$\lim_{x\to +\infty} h(x)=\lim_{x\to +\infty} \ln\left(e^{2x}-4e^{x}\right)=\lim_{t\to +\infty} \ln(t)=+\infty$$

ب-

- لدينا : $h(\ln 5)=\ln\left(e^{2\ln 5}-4e^{\ln 5}\right)=\ln(25-20)=\ln 5$

YOUR WAY طريقكم
جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

$$h(\ln 5)=\ln 5$$

▪

✓ الدالة h قابلة للإشتقاق في $\ln(5)$

✓ و لدينا : $h'(\ln(5))=6$ إذن $h'(\ln(5))\neq 0$

إذن الدالة h^{-1} قابلة للإشتقاق في $h(\ln 5)=\ln 5$

و لدينا : $(h^{-1})'(\ln 5)=(h^{-1})'(h(\ln 5))=\dfrac{1}{h'(\ln 5)}=\dfrac{1}{6}$

إذن : $(h^{-1})'(\ln 5)=\dfrac{1}{6}$

YOUR WAY
جمعية طريقكم لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

الصفحة
1
3

★★

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2017
- الموضوع -

NS 22

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⵓⵍⴰⵏ
ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات		مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها		المعامل	7

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و تتوزع حسب المجالات كما يلي:

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	حساب الاحتمالات	3 نقط
التمرين الثالث	الأعداد العقدية	3 نقط
المسألة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل و المتتاليات العددية	11 نقطة

YOUR WAY
جمعية طريقكم لتوجيه وارشاد شباب المستقبل

- بالنسبة للمسألة ، $\ln$ يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري.

التمرين الأول : (3 نقط)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، المستوى (P) المار من النقطة $A(0\,,\,1\,,\,1)$ و $\vec{u}(1\,,\,0\,,\,-1)$ متجهة منظمية عليه و الفلكة (S) التي مركزها النقطة $\Omega(0\,,\,1\,,\,-1)$ و شعاعها $\sqrt{2}$

0.5 **1)** أ- بين أن $x-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P)

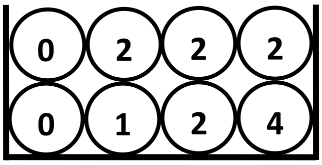
0.75 ب- بين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) و تحقق من أن $B(-1\,,1\,,0)$ هي نقطة التماس.

0.25 **2)** أ- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من النقطة A و العمودي على المستوى (P)

0.75 ب- بين أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1\,,\,1\,,0)$

0.75 **3)** بين أن $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$ و استنتج مساحة المثلث OCB

التمرين الثاني : (3 نقط)



يحتوي صندوق على ثماني كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس و تحمل كل واحدة منها عددا كما هو مبين في الشكل جانبه.

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1.5 **1)** نعتبر الحدث A : " من بين الكرات الثلاث المسحوبة لا توجد أية كرة تحمل العدد **0** ".

و الحدث B : " جداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة يساوي **8** ".

بين أن $p(A)=\dfrac{5}{14}$ و أن $p(B)=\dfrac{1}{7}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة.

0.5 أ- بين أن $p(X=16)=\dfrac{3}{28}$

1 ب- الجدول جانبه يتعلق بقانون احتمال المتغير العشوائي X
أتمم ملء الجدول بعد نقله على ورقة تحريرك معللا أجوبتك.

x_i	0	4	8	16
$p(X=x_i)$				$\dfrac{3}{28}$

التمرين الثالث : (3 نقط)

نعتبر العددين العقديين a و b بحيث $a=\sqrt{3}+i$ و $b=\sqrt{3}-1+\left(\sqrt{3}+1\right)i$

0.25 **1)** أ- تحقق من أن $b=(1+i)a$

0.5 ب- استنتج أن $|b|=2\sqrt{2}$ و أن $\arg b\equiv\dfrac{5\pi}{12}\,[2\pi]$

0.5 ج- استنتج مما سبق أن $\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\,\vec{u}\,,\vec{v})$

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما a و b و النقطة C التي لحقها c بحيث $c=-1+i\sqrt{3}$

0.75 أ- تحقق من أن $c=ia$ و استنتج أن $OA=OC$ و أن $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

0.5 ب- بين أن النقطة B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$

0.5 ج- استنتج أن الرباعي $OABC$ مربع .

طريقكم YOUR WAY جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل
Moutamadris.ma

المسألة : (11 نقطة)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$

1) تحقق من أن $g(1)=0$ 0.25

2) انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g جانبه : 1

بين أن $g(x)\leq 0$ لكل x من المجال $]0\,,1]$

و أن $g(x)\geq 0$ لكل x من المجال $[1\,,+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1\ cm$)

1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$ و أول هندسيا النتيجة. 0.5

2) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 0.25

ب- بين أن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ 0.75

3) أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$ 1

ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $]0\,,1]$ و تزايدية على المجال $[1\,,+\infty[$ 0.75

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$ 0.25

4) أ- حل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلة $\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x=0$ 0.5

ب- استنتج أن المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين يتم تحديد زوج إحداثيتي كل منهما. 0.5

ج- بين أن $f(x)\leq x$ لكل x من المجال $[1\,,2]$ واستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (D) على $[1\,,2]$ 0.75

5) أنشئ ، في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، المستقيم (D) و المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها محصور بين $2{,}4$ و $2{,}5$) 1

6) أ- بين أن $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$ 0.5

ب- بين أن الدالة $H:x\mapsto 2\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto\dfrac{2}{x}-1$ على المجال $]0,+\infty[$ 0.25

ج- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\displaystyle\int_1^2\left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x\,dx=(1-\ln 2)^2$ 0.5

د- احسب ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$ 0.5

III) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=\sqrt{3}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $I\!N$

1) بين بالترجع أن $1\leq u_n\leq 2$ لكل n من $I\!N$ 0.5

2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكنك استعمال نتيجة السؤال II) 4) ج-) 0.5

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها. 0.75

YOUR WAY طريقكم لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

حلول الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا – الدورة العادية 2017

مادة الرياضيات ـ شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

التمرين الأول :

1ـ أـ لتكن : $ax+by+cz+d=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P)

و بما ان : $\vec{u}(1,0-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P) فان : $a=1$ و $b=0$ و $c=-1$

و منه معادلة المستوى (P) تصبح : $x-z+d=0$

وبما ان : المستوى (P) يمر من النقطة $A(0,1,1)$ فان : $0-1+d=0$ أي ان : $d=1$

و منه فان : $x-z+1=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P).

1ـ بـ + لنحسب مسافة النقطة $\Omega(0,1,-1)$ عن المستوى $(P):\ x-z+1=0$

لدينا : $d(\Omega,(P))=\dfrac{|x_\Omega-z_\Omega+1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ يعني : $d(\Omega,(P))=\dfrac{|0-(-1)+1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}$ أي : $d(\Omega,(P))=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

و بما ان شعاع الفلكة (S) هو : $R=\sqrt{2}$ و ان : $d(\Omega,(P))=\sqrt{2}$ أي : $d(\Omega,(P))=R=\sqrt{2}$

فان : المستوى (P) مماس للفلكة (S).

+ لنتحقق من ان النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة تماس (P) و (S)

▪ لنتحقق من كون $B\in(P)$: $-1-0+1=0$ أي ان : $0=0$ اذن : $B\in(P)$

▪ لنتحقق من كون $B\in(S)$: لدينا مركز الفلكة (S) هو $\Omega(0,1,-1)$ و شعاعها $R=\sqrt{2}$

أي ان : $(S):\ (x-0)^2+(y-1)^2+(z-(1))^2=\sqrt{2}^2$ أي ان : $(S):\ x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$

و لدينا : $(-1)^2+(1-1)^2+(0+1)^2=2$ أي أن : $2=2$ اذن : $B\in(S)$

ومنه فان : النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة تماس (P) و (S).

2ـ أ – لدينا : المستقيم (Δ) يمر من النقطة $A(0,1,1)$

و بما ان : $(\Delta)\perp(P)$ فان : $\vec{u}(1,0,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (P)

فان : $\begin{cases} x=0+1t \\ y=1+0t \\ z=1-1t \end{cases}\ ;\ (t=IR)$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).

2ـبـ ولدينا : $d(\Omega,(\Delta))=\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{2}=R$ و منه (Δ) مماس للفلكة (S)

لدينا : $(S):\ x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$ و $C(1,1,0)$

و بما أن : $1^2+(1-1)^2+(0+1)^2=2$ أي $2=2$ فان : $C\in(S)$

و لدينا من جهة أخرى : $(\Delta):\begin{cases} x=0+1t \\ y=1+0t \\ z=1-1t \end{cases}$ و $\begin{cases} 1=0+1t \\ 1=1+0t \\ 0=1-1t \end{cases}$ أي $\begin{cases} t=1 \\ 1=1 \\ t=1 \end{cases}$ و منه : $C\in(\Delta)$

و بالتالي (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1,1,0)$

3ـ + حساب $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}$

طريقكم YOUR WAY
جمعية توجيه وإرشاد شباب المستقبل

لدينا : $\vec{i}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{k} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix} = \overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}$ اذن : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$

+ حساب مساحة المثلث OCB

لدينا : $\frac{2}{2} = \frac{\left|\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}\right|}{2} = S_{OCB}$ اذن : $S_{OCB}=1$

التمرين الثاني :

1ـ لدينا : $p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}$ و : $p(B)=\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{C_4^3+C_1^1\times C_4^1\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{4}{56}=\frac{1}{7}$

2ـ أـ لدينا : $p(X=16)=\frac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$

2ـ بـ

القيم التي يأخذها X : $X(\Omega)=\{0,4,8,16\}$

لدينا : $p(X=0)=1-p(\overline{X=0})=1-\frac{C_6^3}{C_8^3}=1-\frac{20}{56}=\frac{36}{56}=\frac{9}{14}$

و : $p(X=4)=\frac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$

و : $p(X=8)=\frac{C_4^3+C_1^1\times C_4^1\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$

و : $p(X=16)=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$ (حسب نتيجة السؤال السابق)

وبالتالي :

$X=x_i$	0	4	8	16
$p(X=x_i)$	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$

التمرين الثالث :

1ـأـ لدينا : $(1+i)a=(1+i).(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i-1=\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)=b$

اذن : $b=(1+i)a$

1ـبـ لدينا : $b=(1+i)a$ يعني : $|b|=|(1+i).a|=|1+i|\times|a|=\sqrt{1^2+1^2}\times\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2\sqrt{2}$

لدينا : $\arg b\equiv\arg[(1+i).a]\equiv\arg(1+i)+\arg(a)$

- ■ ولدينا : $1+i=\sqrt{2}.(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}.(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ أي أن : $\arg(1+i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$
- ■ و : $a=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=2.(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$ أي أن : $\arg(a)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

وبالتالي : $\arg b\equiv(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})[2\pi]\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$

1ـجـ لدينا : $b=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$ و : $|b|==2\sqrt{2}$ يعني : $b=2\sqrt{2}.(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}})$

يعني : $b=2\sqrt{2}.(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})$ وبماأن : $\arg b\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$ فان : $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2ـ أـ لدينا : $ia=i.(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}i+i^2=-1+\sqrt{3}i$ اذن : $c=ia$

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

لدينا : $c=ia$ يعني أن : $\frac{c}{a}=i$ يعني أن : $\begin{cases}\left|\frac{c}{a}\right|=1\\ \frac{c}{a}=1.(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}|c|=|a|\\ \arg\frac{c}{a}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}|c-o|=|a-o|\\ \arg\frac{c-o}{a-o}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ اذن : $\begin{cases}OA=OC\\ \overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

2ـب تذكران : ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالازاحة T التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$. يعني : $T(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow z'-z=c$

لدينا : + لحق المتجهة $\overrightarrow{OC}$ هو : $Aff\,(\overrightarrow{OC})=c=ia$

+ لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو : $Aff\,(\overrightarrow{AB})=b-a=(1+i).a-a=ia$

اذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ أي : $b-a=c$

و منه فان : النقطة B هي صورة النقطة A الازاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$.

2ـج لدينا : B هي صورة النقطة A الازاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$ يعني : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$

أي ان : $OABC$ متوازي أضلاع

و بما أن : $OA=OC$ و ان : $\overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ (حسب نتيجة السؤال 2ـأ)

فان : $OABC$ مربع.

المسألة :

Iـ 1ـ لدينا : $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$ و : $D_g=]0,+\infty[$ و : $1\in]0,+\infty[$

يعني : $g(1)=1^2+1-2+2\ln 1$ اذن : $g(1)=0$

2ـ ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$ ، يعني : $x\in]0,1]$ أو $x\in[1,+\infty[$

- اذا كان : $x\in]0,1]$: لدينا $x\leq 1$ و بما أن g تزايدية حسب جدول التغيرات فان : $g(x)\leq g(1)$
  و منه فان : $g(x)\leq 0$ $\forall x\in]0,1]$
- اذا كان : $x\in[1,+\infty[$: لدينا $x\geq 1$ و بما أن g تزايدية حسب جدول التغيرات فان : $g(x)\geq g(1)$
  و منه فان : $g(x)\geq 0$ $\forall x\in[1,+\infty[$

IIـ 1ـ لدينا : $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x+(1-\frac{2}{x})\ln x$

و بما أن : $\lim_{x\to0^+}x=0$ و $\lim_{x\to0^+}1-\frac{2}{x}=-\infty$ و $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

فان : $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$

بما ان $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ فان : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C) على يمين 0.

2ـأ لدينا : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x+(1-\frac{2}{x})\ln x$

$=\lim_{x\to+\infty}x+\ln x-2\frac{\ln x}{x}$

و بما أن : $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

فان : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2ـب لدينا : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

طريقكم YOUR WAY التوجيه جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{\ln x}{x}-2\frac{\ln x}{x^2}$ و بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$

فان : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

و لدينا من جهة اخرى : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{2}{x})\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-2\frac{\ln x}{x}$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

فان : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=+\infty$

ومنه فان : المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ بجوار $+\infty$

3-أ- ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$ ، ولدينا : $f(x)=x+(1-\frac{2}{x})\ln x$

اذن : $f'(x)=1+\frac{2}{x^2}\ln x+(1-\frac{2}{x}).\frac{1}{x}$ يعني : $f'(x)=1+\frac{2}{x^2}\ln x+\frac{x-2}{x^2}$

يعني : $f'(x)=\frac{x^2++x-2+2\ln x}{x^2}$ اذن : $\forall x\in]0,+\infty];\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

3-ب- لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ و : $\forall x\in]0,+\infty];\ x^2\succ 0$

اذن اشارة f' هي نفسها اشارة $g(x)$ لكل $x\in]0,+\infty]$

و حسب نتيجة السؤال (I-2) :

لدينا : $\forall x\in]0,1]\ \ g(x)\le 0$ و منه : $\forall x\in]0,1];\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}\le 0$ اذن : f تناقصية على $]0,1]$

ولدينا : $\forall x\in[1,+\infty[\ \ g(x)\ge 0$ و منه : $\forall x\in[1,+\infty[\ \ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}\ge 0$ اذن : f تزايدية على $[1,+\infty[$

3-ج-

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

4-أ- لدينا : $(1-\frac{2}{x})\ln x=0$ يعني : $\ln x=0$ أو $1-\frac{2}{x}=0$ يعني : $x=1$ أو $x=2$

اذن مجموعة حلول المعادلة $(1-\frac{2}{x})\ln x=0$ على المجال $]0,+\infty[$ هي : $S=\{1,2\}$

لاحظ ان : $1\in]0,+\infty[$ و ان : $2\in]0,+\infty[$

4-ب - لدينا : $f(x)=x$ يعني : $(1-\frac{2}{x})\ln x=0$ يعني : $x=1$ أو $x=2$

و منه المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين هما : $M(1,1)$ و $N(2,2)$

4-ج- لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[\ ;\ f(x)-x=(1-\frac{2}{x})\ln x=\frac{x-2}{x}.\ln x$

و بما أن : $\forall x\in[1,2]\ \ln x\ge 0$ و $\forall x\in[1,2]\ \ x-2\le 0$ و $\forall x\in[1,2]\ \ x\ge 0$

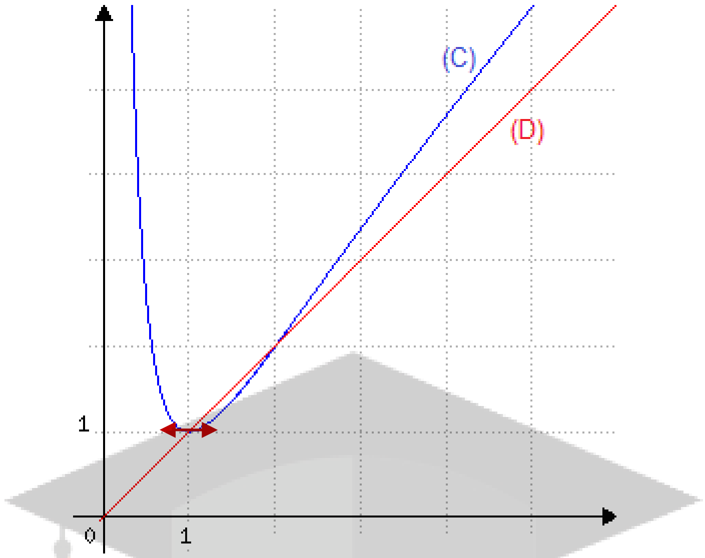
فان : $\forall x\in[1,2]\ \ \frac{x-2}{x}.\ln x\le 0$ أي ان : $\forall x\in[1,2]\ \ f(x)-x\le 0$

و بالتالي فان : $\forall x\in[1,2]\ \ f(x)\le x$

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

بما أن : $f(x) \le x$ $\forall x \in [1,2]$ فان المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $[1,2]$

5ـ تمثيل المنحنى (C) و المستقيم (D) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$



6ـأ
$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}.\ln x.dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}.(\ln 2)^2$$

6ـب لدينا : $H(x) = 2\ln x - x$ و $h(x) = \frac{2}{x} - 1$

لدينا : H دالة متصلة على المجال $]0,+\infty[$ (لأنها مجموع دوال متصلة على $]0,+\infty[$)

و لدينا : $H'(x) = (2\ln x - x)' = \frac{2}{x} - 1$ يعني : $H'(x) = h(x)$

اذن : H دالة أصلية للدالة h على المجال $]0,+\infty[$.

6ـج لدينا : $\int_1^2 (\frac{2}{x}-1)\ln x dx = [(2\ln x - x).\ln x]_1^2 - \int_1^2 \frac{2\ln x - x}{x}dx = (2\ln 2 - 2).\ln 2 - 2\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx + [x]_1^2$

يعني : $\int_1^2 (\frac{2}{x}-1)\ln x dx = 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - (\ln 2)^2 + 1 = (\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 1$

اذن : $\int_1^2 (\frac{2}{x}-1)\ln x dx = (\ln 2 - 1)^2 = (1 - \ln 2)^2$

6ـد لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$.

لدينا : $\mathcal{A} = \int_1^2 |f(x)-x|dx$

و حسب نتيجة السؤال (II – 4ـج) : $f(x) \le x$ $\forall x \in [1,2]$ أي أن : $f(x)-x \le 0$ $\forall x \in [1,2]$

أي ان : $|f(x)-x| = -(f(x)-x) = (\frac{2}{x}-1).\ln x$ $\forall x \in [1,2]$

و منه : $\mathcal{A} = \int_1^2 (\frac{2}{x}-1)\ln x dx = (1-\ln 2)^2 cm^2$

III ـ1 بالنسبة لـ $n=0$: لدينا $u_0 = \sqrt{3}$ و منه $1 \le u_0 \le 2$ (العبارة صحيحة لأجل $n=0$)

نفترض أن : $1 \le u_n \le 2$ ونبين ان $1 \le u_{n+1} \le 2$

لدينا : $1 \le u_n \le 2$ أي أن : $u_n \in [1,2] \subset]1,+\infty[$ وبما أن : f تزايدية على $]1,+\infty[$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

فان : $f(1) \le f(u_n) \le f(2)$ اي أن : $1 \le u_{n+1} \le 2$ (العبارة صحيحة لأجل $n+1$)

	و بالتالي : $\forall n \in IN\ ;\ 1\le u_n \le 2$
2ـ	لدينا حسب نتيجة السؤال (II.4ـج) : $\forall x\in[1,2]\ ;\ f(x)\le x$ و لدينا من جهة أخرى : $\forall n\in IN\ ;\ 1\le u_n\le 2$ أي أن : $\forall n\in IN\ ;u_n\in[1,2]$ اذن : $\forall n \in IN\ ;\ f(u_n)\le u_n$ يعني : $\forall n\in IN\ ;\ u_{n+1}\le u_n$ و بالتالي فان المتتالية (u_n) تناقصية
3ـ	+ لدينا : $\forall n\in IN\ ;\ 1\le u_n\le 2$ يعني ان المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 1 و بما أن المتتالية (u_n) تناقصية فانها متقاربة. + لدينا f متصلة على المجال $]0,+\infty[$ و بالخصوص على المجال $[1,2]$ و : $f([1,2])=[1,2]$ أي ان : $f([1,2])\subset[1,2]$ و بما أن (u_n) متقاربة و $u_0\in[1,2]$ فان النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق : $f(l)=l$ و حسب نتيجة السؤال (II.4ـب) : $l=1$ أو $l=2$ و بما أن (u_n) تناقصية فان : $\forall n\in IN\ ;\ u_n\le u_0$ أي : $\forall n\in IN\ ;\ u_n\le\sqrt{3}$ أي $\lim_{n\to+\infty}u_n\le\sqrt{3}$ و بالتالي فان : $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

Phy.handa@gmail.com

GSM : 0661931283

الصفحة
1
3

★★

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2017
- الموضوع -

RS 22

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⵓⵍⴰⵏ
ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	**الرياضيات**	مدة الإنجاز	**3**
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها	المعامل	**7**

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

مكونات الموضوع

- يتكون الموضوع من أربعة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، وتتوزع حسب المجالات كما يلي :

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	حساب الاحتمالات	3 نقط
التمرين الثالث	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الرابع	المتتاليات العددية	2.5 نقط
المسألة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل	8.5 نقط

التمرين الأول : (3 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر الفلكة (S) التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$ و المستوى (P) الذي معادلته $y-z=0$

1) أ- بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,1,1)$ و شعاعها هو 2 0.5

ب- احسب $d(\Omega,(P))$ و استنتج أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) 0.5

ج- حدد مركز و شعاع الدائرة (C) 0.5

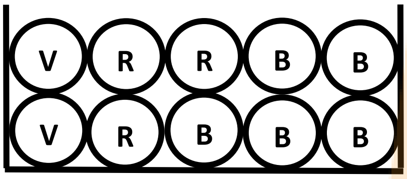
2) ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة $A(1,-2,2)$ و العمودي على المستوى (P)

أ- بين أن $\vec{u}(0,1,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) 0.25

ب- بين أن $\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{2}\|\vec{u}\|$ و استنتج أن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة (S) في نقطتين. 0.75

ج- حدد مثلوث إحداثيات كل نقطة من نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) و الفلكة (S) 0.5

التمرين الثاني : (3 نقط)



يحتوي صندوق على 10 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس : خمس كرات بيضاء و ثلاث كرات حمراء و كرتان خضراوان (انظر الشكل جانبه). نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من الصندوق.

1) نعتبر الحدث A : " من بين الكرات الأربع المسحوبة توجد كرة خضراء واحدة فقط ". 1.5

و الحدث B : " من بين الكرات الأربع المسحوبة توجد بالضبط ثلاث كرات من نفس اللون ".

بين أن $p(A)=\frac{8}{15}$ وأن $p(B)=\frac{19}{70}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الخضراء المسحوبة.

أ- بين أن $p(X=2)=\frac{2}{15}$ 0.5

ب- حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X و بين أن الأمل الرياضي $E(X)$ يساوي $\frac{4}{5}$ 1

التمرين الثالث : (3 نقط)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+4z+8=0$ 0.75

2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c بحيث $a=-2+2i$ و $b=4-4i$ و $c=4+8i$

أ- ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ 0.5

بين أن $z'=-iz-4$

ب- تحقق من أن النقطة B هي صورة النقطة C بالدوران R و استنتج طبيعة المثلث ABC 0.75

3) ليكن ω لحق النقطة Ω منتصف القطعة $[BC]$

أ- بين أن $|c-\omega|=6$ 0.5

ب- بين أن مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $|z-\omega|=6$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC 0.5

طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الرابع : (2.5 نقط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=17$ و $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+12$ لكل n من $I\!N$

1) أ- بين بالترجع أن $u_n>16$ لكل n من $I\!N$ 0.5

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية و استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. 0.5

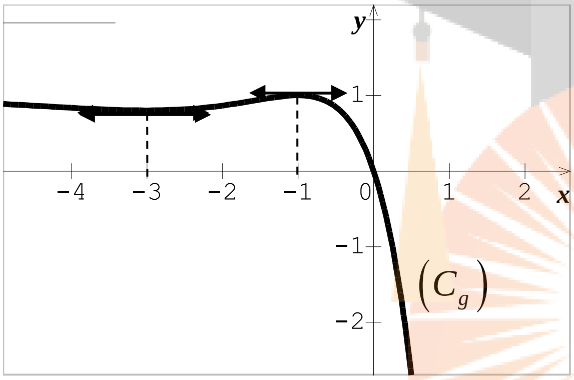
2) لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث $v_n=u_n-16$ لكل n من $I\!N$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية. 0.5

ب- استنتج أن $u_n=16+\left(\frac{1}{4}\right)^n$ لكل n من $I\!N$ ثم حدد نهاية المتتالية (u_n) 0.5

ج- حدد أصغر قيمة للعدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n<16{,}0001$ 0.5

المسألة : (8.5 نقط)



I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $I\!R$ بما يلي :

$$g(x)=1-(x+1)^2e^x$$

1) تحقق من أن $g(0)=0$ 0.25

2) انطلاقا من التمثيل المبياني (C_g) للدالة g (انظر الشكل جانبه) 1

بين أن $g(x)\geq 0$ لكل x من $]-\infty,0]$

وأن $g(x)\leq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I\!R$ بما يلي : $f(x)=x+1-\left(x^2+1\right)e^x$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $2\ cm$)

1) أ- تحقق من أن $f(x)=x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x$ لكل x من $I\!R$ ثم استنتج أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 0.75

ب- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ واستنتج أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ 0.5

ج- بين أن المنحنى (C_f) يوجد تحت المستقيم (D) 0.25

2) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ (يمكنك كتابة $f(x)$ على الشكل $x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$) 0.5

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه. 0.25

3) أ- بين أن $f'(x)=g(x)$ لكل x من $I\!R$ 0.75

ب- بين أن الدالة f تزايدية على $]-\infty\,,0]$ و تناقصية على $[0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على $I\!R$ 0.75

ج- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما -3 و -1 0.75

4) أنشئ ، في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، المستقيم (D) و المنحنى (C_f) (نأخذ $f(-3)\approx-2{,}5$ و $f(-1)\approx-0{,}75$) 1

5) أ- تحقق من أن $H:x\mapsto(x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto xe^x$ على $I\!R$ ثم بين أن $\int_{-1}^{0}xe^x\,dx=\frac{2}{e}-1$ 0.5

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\int_{-1}^{0}\left(x^2+1\right)e^x\,dx=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$ 0.75

ج- احسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (D) و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته $x=-1$ 0.5

YOUR WAY
Moutamadris.ma

تصحيح التمرين الأول

1) أ- لدينا :

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in(S) &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0\\ &\Leftrightarrow x^2-2x+y^2-2y+z^2-2z=1\\ &\Leftrightarrow x^2-2(1)x+(1)^2+y^2-2(1)y+(1)^2+z^2-2(1)z+(1)^2=1+(1)^2+(1)^2+(1)^2\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4\\ &\Leftrightarrow (x-(1))^2+(y-(1))^2+(z-(1))^2=(2)^2 \end{aligned}$$

إذن (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ و شعاعها $R=2$

ب-

✓ $d(\Omega,(P))=\dfrac{|(1)-(1)|}{\sqrt{(0)^2+(1)^2+(1)^2}}=0$

✓ بما أن $d(\Omega,(P))<R$ فإن (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C)

ج- بما أن $d(\Omega,(P))=0$ فإن (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) (الدائرة الكبرى)

و منه مركز الدائرة (C) هو النقطة $\Omega(1,1,1)$ و شعاعها هو 2.

(مركز الدائرة هو المسقط العمودي لمركز الفلكة على المستوى (P) أي في هذه الحالة هو النقطة Ω

و شعاعها 2 $\left(r=\sqrt{R^2-d^2(\Omega,(P))}=\sqrt{2^2-0^2}\right.$

2) أ- لدينا $y-z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) إذن $\vec{u}(0,1,-1)$ هي متجهة منظمية للمستوى (P)

و بما أن $(\Delta)\perp(P)$ فإن $\vec{u}(0,1,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

ب-

✓ لدينا : $\vec{u}(0,1,-1)$ و $\overrightarrow{\Omega A}(0,-3,1)$

إذن $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=2.\vec{i}$

و منه $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|=2$

طريقكم YOUR WAY للتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{(0)^2+(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

و بالتالي : $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|=\sqrt{2}\|\vec{u}\|$

✓ لدينا : $d\left(\Omega,(\Delta)\right)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}=\sqrt{2}$

إذن بما أن $d\left(\Omega,(\Delta)\right)<R$ فإن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة (S) في نقطتين

ج- تمثيل بارمتري للمستقيم (Δ) هو : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=1\\y=-2+t\\z=2-t\end{cases}$

لنحدد مثلوث إحداثيات كل نقطة من نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) و الفلكة (S)

$$M(x,y,z)\in(\Delta)\cap(S)\iff\begin{cases}x=1\\y=-2+t\\z=2-t\\(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2^2\end{cases}\qquad(t\in\mathbb{R})$$

بعد التعويض نحصل على المعادلة $t^2-4t+3=0$

لدينا : $\Delta=4$

إذن : $t=3$ أو $t=1$

✸ $t=1$: $\begin{cases}x=1\\y=-2+1=-1\\z=2-1=1\end{cases}$

✸ $t=3$: $\begin{cases}x=1\\y=-2+3=1\\z=2-3=-1\end{cases}$

و لدينا :

تصحيح التمرين الثاني

التجربة " سحب في آن واحد أربع كرات من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

لدينا : $card\,\Omega = C_{10}^{4} = 210$

(1

✓ A : " من بين الكرات الأربع المسحوبة توجد كرة خضراء واحدة فقط "

$$V\overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}$$

لدينا : $cardA = C_{2}^{1} \times C_{8}^{3} = 2 \times 56 = 112$

إذن : $p(A) = \dfrac{cardA}{card\,\Omega} = \dfrac{112}{210} = \dfrac{8}{15}$

✓ B : " من بين الكرات الأربع المسحوبة توجد بالضبط ثلاث كرات من نفس اللون "

$BBB\overline{B}$ أو $RRR\overline{R}$

لدينا : $cardB = C_{3}^{3} \times C_{7}^{1} + C_{5}^{3} \times C_{5}^{1} = 1 \times 7 + 10 \times 5 = 57$

إذن : $p(B) = \dfrac{cardB}{card\,\Omega} = \dfrac{57}{210} = \dfrac{19}{70}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الخضراء المسحوبة .

أ- $X = 2 \;\rightarrow\; VV\overline{V}\,\overline{V}$

$$p(X = 2) = \frac{C_{2}^{2} \times C_{8}^{2}}{210} = \frac{1 \times 28}{210} = \frac{2}{15}$$

ب-

✓ $X = 0 \;\rightarrow\; \overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}$

$$p(X = 0) = \frac{C_{8}^{4}}{210} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$$

✓ $X = 1 \;\rightarrow\; V\overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}$

$$p(X = 1) = p(A) = \frac{8}{15}$$

$$p(X=2)=\frac{2}{15}$$

قانون احتمال X :

x			2
$(\quad _i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

✸ الأمل الرياضي :

$$E(X)=\left(0\times\frac{1}{3}\right)+\left(1\times\frac{8}{15}\right)+\left(2\times\frac{2}{15}\right)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

تصحيح التمرين الثالث

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+4z+8=0$

لدينا : $\Delta=(4)^2-4(1)(8)=16-32=-16$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين

$$z=\frac{-4+i\sqrt{16}}{2(1)}=\frac{-4+4i}{2}=-2+2i$$ أو

$$z=\frac{-4-i\sqrt{16}}{2(1)}=\frac{-4-4i}{2}=-2-2i$$

إذن : $S=\{-2-2i,-2+2i\}$

أ-

$$z'-a=e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}(z-a)$$
$$z'-(-2+2i)=-i\left(z-(-2+2i)\right)$$
$$z'+2-2i=-i\left(z+2-2i\right)$$
$$z'+2-2i=-iz-2i-2$$
$$z'=-iz-2i-2-2+2i$$
$$z'=-iz-4$$

ب-

✓ لدينا :

$$\begin{aligned} -ic-4 &= -i\left(4+8i\right)-4 \\ &= -4i+8-4 \\ &= 4-4i \\ &= b \end{aligned}$$

إذن : B هي صورة النقطة C بالدوران R

✓ لدينا $R\left(C\right)=B$ إذن $\begin{cases} AC=AB \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

و منه المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في A.

3) أ- لدينا Ω منتصف القطعة $[BC]$

إذن : $\omega=\dfrac{b+c}{2}=\dfrac{4-4i+4+8i}{2}=\dfrac{8+4i}{2}=4+2i$

و منه : $|c-\omega|=|(4+8i)-(4+2i)|=|6i|=6$

ب- لنحدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $|z-\omega|=6$

$$|z-\omega|=6\Leftrightarrow \Omega M=6$$

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها Ω و شعاعها 6

و لدينا Ω منتصف القطعة $[BC]$ و $|c-\omega|=6$ إذن $\Omega C=\Omega B$

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

و من الواضح أن $|a-\omega| = |-2+2i-4-2i| = |-6| = 6$ إذن $\Omega A = \Omega C = \Omega B$

و بالتالي : مجموعة النقط M هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

تصحيح التمرين الرابع

1) أ-

✓ من أجل $n=0$:

لدينا $u_0 = 17$

إذن $u_0 > 16$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

نفترض أن $u_n > 16$

و نبين أن $u_{n+1} > 16$ ؟

حسب الإفتراض لدينا : $u_n > 16$

إذن : $\frac{1}{4}u_n > 4$

إذن : $\frac{1}{4}u_n + 12 > 4 + 12$

و منه : $u_{n+1} > 16$

✓ نستنتج أن : $u_n > 16$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب-

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 12 - u_n = \left(\frac{1}{4} - 1\right)u_n + 12 = \frac{-3}{4}u_n + 12 = \frac{-3}{4}(u_n - 16)$

حسب نتيجة السؤال 1) أ- لدينا : $u_n > 16$ إذن $u_n - 16 > 0$ إذن $\frac{-3}{4}(u_n - 16) < 0$

و منه $u_{n+1} - u_n < 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

(u_n) تناقصية.

✓ بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة فإن (u_n) متقاربة .

2) أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} - 16 = \frac{1}{4}u_n + 12 - 16 = \frac{1}{4}u_n - 4 = \frac{1}{4}(u_n - 16) = \frac{1}{4}v_n$

إذن : $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ و حدها الأول : $v_0 = u_0 - 16 = 17 - 16 = 1$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $v_n = v_0 \times q^n$ إذن : $v_n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ولدينا : $v_n = u_n - 16$ إذن : $u_n = 16 + v_n$

و منه : $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

ج-

$$u_n < 16,0001 \quad \Leftrightarrow 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n < 16,0001$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < 0,0001$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) < \ln(0,0001)$$

$$\Leftrightarrow n.\ln\left(\frac{1}{4}\right) < \ln(0,0001)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,0001)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$$

إذن : أصغر قيمة للعدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n < 16,0001$ هي : $\boxed{n = 7}$

وبالتالي

تصحيح المسألة

I.

1) $g(0)=1-(0+1)^2e^0=1-1\times1=0$

2) مبيانيا :

✓ على المجال $]-\infty,0]$: لدينا (C_g) يوجد فوق محور الأفاصيل إذن : $g(x)\geq 0$

✓ و على المجال $[0,+\infty[$: لدينا (C_g) يوجد تحت محور الأفاصيل إذن : $g(x)\leq 0$

II.

1) أ-

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=x+1-(x^2+1)e^x=x+1-x^2e^x-e^x=x+1-4\times\frac{x^2}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x=x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x$$

إذن : $f(x)=x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x=-\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}x+1=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\end{cases}$

ب-

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x=0$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0\end{cases}$$

✓ بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ فإن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ج- لدينا : $f(x)=x+1-(x^2+1)e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن : $f(x)-(x+1)=-(x^2+1)e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$

و منه : $f(x)-(x+1)<0$ لكل x من $\mathbb{R}$

و بالتالي : المنحنى (C_f) يوجد تحت المستقيم (D)

2) أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]=-\infty$

لأن :
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\end{cases}$$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x=-\infty$

إذن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$، فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب .

طريقكم YOUR WAY
جمعية توجيه
وإرشاد شباب المستقبل

لأن :

أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x+1-(x^2+1)e^x\right)' \\ &= 1-\left((x^2+1)'e^x+(x^2+1)(e^x)'\right) \\ &= 1-\left(2xe^x+(x^2+1)e^x\right) \\ &= 1-(x^2+2x+1)e^x \\ &= 1-(x+1)^2e^x \\ &= g(x) \end{aligned}$$

إذن : $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- لدينا : $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

✓ على المجال $]-\infty,0]$: $g(x)\geq 0$ إذن $f'(x)\geq 0$ و منه f تزايدية

✓ على المجال $[0,+\infty[$: $g(x)\leq 0$ إذن : $f'(x)\leq 0$ و منه f تناقصية

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

ج- الدالة f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

YOUR WAY طريقكم
جمعية التوجيه
وإرشاد شباب المستقبل

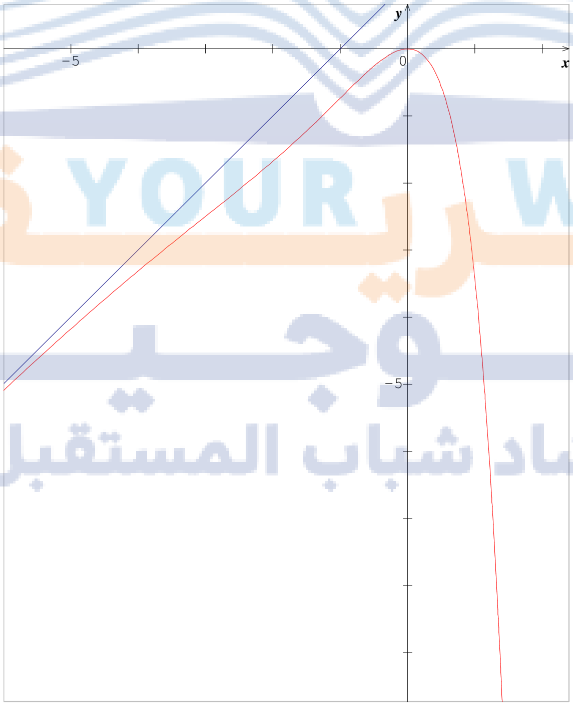
$$\begin{aligned}
f''(x) &= (f')'(x) \\
&= g'(x) \\
&= \left(1-(x+1)^2 e^x\right)' \\
&= 0-\left(\left((x+1)^2\right)' e^x + (x+1)^2 \left(e^x\right)'\right) \\
&= -\left(2(x+1)e^x + (x+1)^2 e^x\right) \\
&= -(x+1)e^x\,(2+x+1) \\
&= -(x+1)(x+3)e^x
\end{aligned}$$

لدينا : $e^x > 0$ إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $-(x+1)(x+3)$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العددين -3 و -1 فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما -3 و -1

4)



(D):y=x+1

5) أ-

❖

✓ الدالة H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$H'(x)=\left((x-1)e^{x}\right)'=(x-1)'e^{x}+(x-1)\left(e^{x}\right)'=1.e^{x}+(x-1)e^{x}=xe^{x}$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $H'(x)=h(x)$

❖ $\int_{-1}^{0}xe^{x}dx=\left[(x-1)e^{x}\right]_{-1}^{0}=(-1)-\left(-2e^{-1}\right)=\frac{2}{e}-1$

ب-

$$\begin{cases}u(x)=x^{2}+1\\ v'(x)=e^{x}\end{cases}\searrow\quad\begin{cases}u'(x)=2x\\ v(x)=e^{x}\end{cases}\downarrow$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\left(x^{2}+1\right)e^{x}dx&=\left[\left(x^{2}+1\right)e^{x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}2xe^{x}dx\\&=1-2e^{-1}-2\int_{-1}^{0}xe^{x}dx\\&=1-\frac{2}{e}-2\left(\frac{2}{e}-1\right)\\&=1-\frac{2}{e}-\frac{4}{e}+2\\&=3-\frac{6}{e}\\&=3\left(1-\frac{2}{e}\right)\end{aligned}$$

ج- مساحة الحيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (D) و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته

$x=-1$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0} \left| f(x) - (x+1) \right| dx \times \left\| \vec{i} \right\| \times \left\| \vec{j} \right\| \\
&= \int_{-1}^{0} \left((x+1) - f(x) \right) dx \times 2cm \times 2cm \\
&= \int_{-1}^{0} \left(x^{2} + 1 \right) e^{x} dx \times 4cm^{2} \\
&= 3\left(1 - \frac{2}{e} \right) \times 4cm^{2} \\
&= 12\left(1 - \frac{2}{e} \right).cm^{2}
\end{aligned}
$$

つづく

YOUR WAY
طريقكم
جمعية لتوجيه
وإرشاد شباب المستقبل

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⵓⵍⴰⵏ
ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2018
-الموضوع-

NS22

★★

المادة	**الرياضيات**	**مدة الإنجاز**	**3**
الشعبة أو المسلك	**شعبة العلوم التجريبية بمسالكها**	**المعامل**	**7**

تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

مكونات الموضوع

يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و تتوزع حسب المجالات كما يلي:

التمرين الأول	**الهندسة الفضائية**	**3 نقط**
التمرين الثاني	**الأعداد العقدية**	**3 نقط**
التمرين الثالث	**حساب الاحتمالات**	**3 نقط**
المسألة	**دراسة دالة عددية و حساب التكامل و المتتاليات العددية**	**11 نقطة**

التمرين الأول (3 نقط):

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A(0,-2,-2)$ و $B(1,-2,-4)$ و $C(-3,-1,2)$

1) بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ ثم استنتج أن $2x+2y+z+6=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) 1

2) لتكن (S) الفلكة التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$

تحقق من أن مركز الفلكة (S) هو $\Omega(1,0,1)$ و أن شعاعها هو $R=5$ 0.5

3) أ- تحقق من أن $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2t\\ z=1+t\end{cases}\;;(t\in\mathbb{R})$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على المستوى (ABC) 0.25

ب- حدد إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) 0.5

4) تحقق من أن $d(\Omega,(ABC))=3$ ثم بين أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة شعاعها 4 يتم تحديد مركزها. 0.75

التمرين الثاني (3 نقط) :

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $2z^2+2z+5=0$ 0.75

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$

أ - أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 0.25

ب – لتكن النقطة A التي لحقها $a=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ و B صورة النقطة A بالدوران R

ليكن b لحق النقطة B، بين أن $b=d.a$ 0.5

3) لتكن t الإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ و النقطة C صورة B بالإزاحة t و c لحق النقطة C

أ - تحقق من أن $c=b+a$ ثم استنتج أن $c=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ (يمكنك استعمال السؤال (2 ب-) 0.75

ب - حدد $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ ثم استنتج أن المثلث OAC متساوي الأضلاع . 0.75

التمرين الثالث (3 نقط) :

يحتوي صندوق على **9** كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس : خمس كرات حمراء تحمل الأعداد **1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2**

و أربع كرات بيضاء تحمل الأعداد **1 ; 2 ; 2 ; 2**

نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و تآنيا 3 كرات من الصندوق .

لتكن الأحداث : A : "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون " و B : "الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس العدد "

و C : "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون و تحمل نفس العدد "

1) بين أن : $p(A)=\frac{1}{6}$ و $p(B)=\frac{1}{4}$ و $p(C)=\frac{1}{42}$ 1.5

2) نعيد التجربة السابقة 3 مرات مع إعادة الكرات الثلاث المسحوبة إلى الصندوق بعد كل سحبة، و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A

أ- حدد وسيطي المتغير العشوائي الحداني X 0.5

ب- بين أن : $p(X=1)=\frac{25}{72}$ و احسب $p(X=2)$ 1

YOUR WAY
طريقكم لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

المسألة (11 نقطة) :

I - لتكن g الدالة العددية المعرفة على **IR** كما يلي : $g(x)=e^{x}-x^{2}+3x-1$

الجدول جانبه يمثل جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

1) تحقق من أن $g(0)=0$ **0.25**

2) حدد إشارة $g(x)$ على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[0,+\infty[$ **0.5**

II– لتكن f الدالة العددية المعرفة على **IR** بما يلي:

$$f(x)=(x^{2}-x)\,e^{-x}+x$$

و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ **(الوحدة 1cm)**

1) أ- تحقق من أن $f(x)=\dfrac{x^{2}}{e^{x}}-\dfrac{x}{e^{x}}+x$ لكل x من **IR** ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **0.5**

ب – احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل مقاربا (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$ **0.75**

ج – تحقق من أن $f(x)=\dfrac{x^{2}-x+xe^{x}}{e^{x}}$ لكل x من **IR** ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **0.5**

د – بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم أول النتيجة هندسيا. **0.5**

2) أ – تحقق من أن $f(x)-x$ و $x^{2}-x$ لهما نفس الإشارة لكل x من **IR** **0.25**

ب – استنتج أن (C) يوجد فوق (D) على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[1,+\infty[$ و تحت (D) على المجال $[0,1]$ **0.5**

3) أ - بين أنه لكل x من **IR** لدينا $f'(x)=g(x)\,e^{-x}$ **0.75**

ب – استنتج أن الدالة f تناقصية على $]-\infty,0]$ و تزايدية على $[0,+\infty[$ **0.5**

ج – ضع جدول تغيرات الدالة f **0.25**

4) أ- تحقق من أن $f''(x)=(x^{2}-5x+4)e^{-x}$ لكل x من **IR** **0.25**

ب- استنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي هما **1** و **4** **0.5**

5) أنشئ (D) و (C) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ $f(4)\approx 4.2$) **1**

6) أ – بين أن الدالة $H:x\mapsto(x^{2}+2x+2)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto -x^{2}e^{-x}$ على **IR**

ثم استنتج أن $\displaystyle\int_{0}^{1}x^{2}e^{-x}dx=\frac{2e-5}{e}$ **0.5**

ب – باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\displaystyle\int_{0}^{1}xe^{-x}dx=\frac{e-2}{e}$ **0.75**

ج – احسب ب cm^{2} مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (D) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$ **0.75**

III – لتكن المتتالية العددية (u_{n}) المعرفة كما يلي : $u_{0}=\dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_{n})$ لكل n من $I\!N$

1) بين أن $0\le u_{n}\le 1$ لكل n من $I\!N$ *(يمكن استعمال نتيجة السؤال II– 3) ب-)* **0.75**

2) بين أن المتتالية (u_{n}) تناقصية . **0.5**

3) استنتج أن (u_{n}) متقاربة و حدد نهايتها. **0.75**

YOUR WAY
طريقكم لتوجيه
جمعية
وإرشاد شباب المستقبل

تصحيح التمرين الأول :

(1

✓ لدينا $\overrightarrow{AB}(1,0,-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-3,1,4)$

إذن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&-2\\1&4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&-2\\-3&4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\-3&1\end{vmatrix}\vec{k}$

و منه : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

✓ لدينا : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $(2)x+(2)y+(1)z+d=0$

و بما أن $A(0,-2,-2)\in(ABC)$ فإن $(2)(0)+(2)(-2)+(1)(-2)+d=0$ أي $d=6$

وبالتالي : $2x+2y+z+6=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

(2

$$M(x,y,z)\in(S) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+z^2-2z=23$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+z^2-2z+1=23+1+1$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=25$$
$$\Leftrightarrow (\quad-(\ ))^2+(\quad-(\ ))^2+(\quad-(\ ))^2=(5)^2$$

إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,0,1)$ و أن شعاعها هو $R=5$

(3 أ-

لنحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من $\Omega(1,0,1)$ و العمودي على المستوى (ABC)

بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) و بما أن (Δ) عمودي على المستوى (ABC)

فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ هي متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

و لدينا $\Omega(1,0,1)\in(\Delta)$

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=(1)+t(2)\\y=(0)+t(2)\\z=1+t(1)\end{cases}$

YOUR WAY
طريقكم للتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

ب-

$$H\left(x_H,y_H,z_H\right)\in(\Delta)\cap(ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H=2t \\ z_H=1+t \\ 2x_H+2y_H+z_H+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H-1+2t \\ z_H=t \\ 2(1+2t)+2(2t)+(1+t)+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H=2t \\ z_H=1+t \\ t=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H=-1 \\ y_H=-2 \\ z_H=0 \end{cases}$$

(4

✓ لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|2(1)+2(0)+(1)+6|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{9}}=\dfrac{9}{3}=3$

بما أن $d(\Omega,(ABC))<R$ ($R=5$ شعاع الفلكة (S))

فإن : المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة شعاعها :

$$r=\sqrt{R^2-\left(d(\Omega,(ABC))\right)^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$$

و مركزها (هو المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (ABC)) نقطة تقاطع (Δ) و (ABC)

أي النقطة $H(-1,-2,0)$

تصحيح التمرين الثاني :

1) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $2z^2+2z+5=0$

لدينا : $\Delta=(2)^2-4(2)(5)=-36$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$z=\frac{-(2)-i\sqrt{36}}{2(2)}$ أو $z=\frac{-(2)+i\sqrt{36}}{2(2)}$

$z=\frac{-2-6i}{4}$ أو $z=\frac{-2+6i}{4}$

$z=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ أو $z=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

إذن : $S=\left\{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right\}$

2) أ- لنكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي : $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

لدينا : $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

إذن : $d=1.\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

ب- لدينا : R هو الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$

إذن الكتابة العقدية للدوران R هي : $z'-0=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-0)$ أي : $\boxed{z'=d.z}$

بما أن $B(b)$ صورة النقطة $A(a)$ بالدوران R

فإن : $b=d.a$

3) أ-

✓ لدينا : t الإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$

إذن الكتابة العقدية للإزاحة t هي : $z'=z+z_{\overrightarrow{OA}}=z+a-0$ أي : $\boxed{z'=z+a}$

بما أن $C(c)$ صورة النقطة $B(b)$ بالإزاحة t

فإن : $c=b+a$

✓ $c=b+a=a\left(\frac{b}{a}+1\right)=a(d+1)=a\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1\right)=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

2) ب- لدينا : $b=d.a$ إذن $\frac{b}{a}=d$ (

ب-

✓ لدينا $c=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ إذن $\frac{c}{a}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

إذن $\arg\left(\frac{c}{a}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

✓ لدينا : $\left|\frac{c}{a}\right|=\left|\frac{c-0}{a-0}\right|=1$ إذن $\frac{OC}{OA}=1$ و منه $\boxed{OC=OA}$

و لدينا : $\arg\left(\frac{c}{a}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ إذن $\arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ و منه $\boxed{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]}$

و بالتالي : المثلث OAC متساوي الأضلاع .

تصحيح التمرين الثالث :

1) التجربة : " نسحب عشوائيا و تآنيا 3 كرات من الصندوق"

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

$card\Omega=C_9^3=84$

✓

A: "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون" ● ● ● أو ○ ○ ○

$cardA=C_4^3+C_5^3=4+10=14$

$$p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{14}{84}=\frac{1}{6}$$

✓

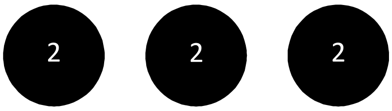
B: "الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس العدد " ① ① ① أو ② ② ②

$cardB=C_3^3+C_6^3=1+20=21$

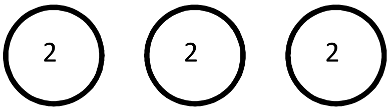
$$p(B)=\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{21}{84}=\frac{1}{4}$$

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

C :"الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون و تحمل نفس العدد"



أو



$$cardC = C_3^3 + C_3^3 = 1 + 1 = 2$$

$$p(C) = \frac{cardC}{card\Omega} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$

2) نكرر التجربة السابقة 3 مرات مع إعادة الكرات الثلاث المسحوبة إلى الصندوق بعد كل سحبة ، و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A

أ- لدينا X متغير عشوائي حداني وسيطاه n و p

حيث : n هو عدد مرات تكرار التجربة أي $n = 3$

و p هو احتمال تحقق الحدث A أي : $p = p(A) = \frac{1}{6}$

ب- $$p(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-1} = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{25}{36} = \frac{25}{72}$$

$$p(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-2} = 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$$

تصحيح المسألة :

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$

1) $g(0) = e^0 - 0^2 + 3(0) - 1 = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$

2)

✓ على المجال $]-\infty, 0]$:

لدينا $x \leq 0$ و انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g لدينا : g تزايدية

إذن : $g(x) \leq g(0)$ و منه $g(x) \leq 0$

✓ على المجال $[0, +\infty[$:

لدينا $x \geq 0$ و انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g لدينا : g تزايدية

إذن : $g(x) \geq g(0)$ و منه $g(x) \geq 0$

YOUR WAY طريقكم
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\left(x^2-x\right)e^{-x}+x$

(1 أ-

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2-x\right)e^{-x}+x \\ &= \left(x^2-x\right)\times\frac{1}{e^x}+x \\ &= \frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x \end{aligned}$$

إذن $f(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x$ لكل x من $\mathbb{R}$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x=+\infty$

لأن
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0^+ & \left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty\right) \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0^+ & \left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\right) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty & \end{cases}$$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}=0$

إذن : المنحنى (C) يقبل مقاربا مائلا (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$

ج-

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لدينا : $f(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x=\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}$

إذن : $f(x)=\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}\times\left(x^2-x+xe^x\right)=+\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-x=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-x+xe^x\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0^-$

و : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$

YOUR WAY طريقكم جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

-

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+xe^x}{xe^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^x}\times\left(x^2-x+xe^x\right)=-\infty$

: $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2-x=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0^-$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-x+xe^x\right)=+\infty\Leftarrow$

و : $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0^-$

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

إذن : المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

(2 أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لديناة: $f(x)-x=\left(x^2-x\right)e^{-x}$

بما أن $e^{-x}>0$

فإن $f(x)-x$ و x^2-x لهما نفس الإشارة لكل x من $\mathbb{R}$

ب- لدينا : $f(x)-x$ و x^2-x لهما نفس الإشارة لكل x من $\mathbb{R}$

لندرس إشارة x^2-x :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x2-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

✓ على المجالين $]-\infty,0]$ و $[1,+\infty[$:

لدينا $x^2-x\geq0$

إذن $f(x)-x\geq0$

و منه (C) يوجد فوق (D)

✓ على المجال $[0,1]$:

لدينا $x^2-x\leq0$

إذن $f(x)-x\leq0$

و منه (C) يوجد تحت (D)

طريقكم YOUR WAY جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لدينا :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\left(x^2-x\right)e^{-x}+x\right)' \\
&= \left(x^2-x\right)'e^{-x}+\left(x^2-x\right)\left(e^{-x}\right)'+1 \\
&= (2x-1)e^{-x}-\left(x^2-x\right)e^{-x}+1 \\
&= e^{-x}\left(2x-1-x^2+x+e^{x}\right) \\
&= e^{-x}\left(e^{x}-x^2+3x-1\right) \\
&= e^{-x}g(x)
\end{aligned}$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=g(x)e^{-x}$

ب- لدينا لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=g(x)e^{-x}$ و نعلم أن لكل x من $\mathbb{R}$ $e^{-x}>0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

- ✓ على المجال $]-\infty,0]$:

لدينا $g(x)\leq 0$ إذن $f'(x)\leq 0$

و منه الدالة f تناقصية على $]-\infty,0]$

- ✓ على المجال $[0,+\infty[$:

لدينا $g(x)\geq 0$ إذن $f'(x)\geq 0$

و منه الدالة f تزايدية على $[0,+\infty[$

ج- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

أ- لدينا : f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^{-x}g(x)\right)' \\ &= \left(e^{-x}\right)'\times g(x)+e^{-x}\times g'(x) \\ &= -e^{-x}\left(e^{x}-x^{2}+3x-1\right)+e^{-x}\left(e^{x}-2x+3\right) \\ &= e^{-x}\left(-e^{x}+x^{2}-3x+1+e^{x}-2x+3\right) \\ &= e^{-x}\left(x^{2}-5x+4\right) \end{aligned}$$

إذن : $f''(x)=\left(x^{2}-5x+4\right)e^{-x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- لدينا $f''(x)=\left(x^{2}-5x+4\right)e^{-x}$ لكل x من $\mathbb{R}$ و نعلم أن لكل x من $\mathbb{R}$ $e^{-x}>0$

إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $x^{2}-5x+4$

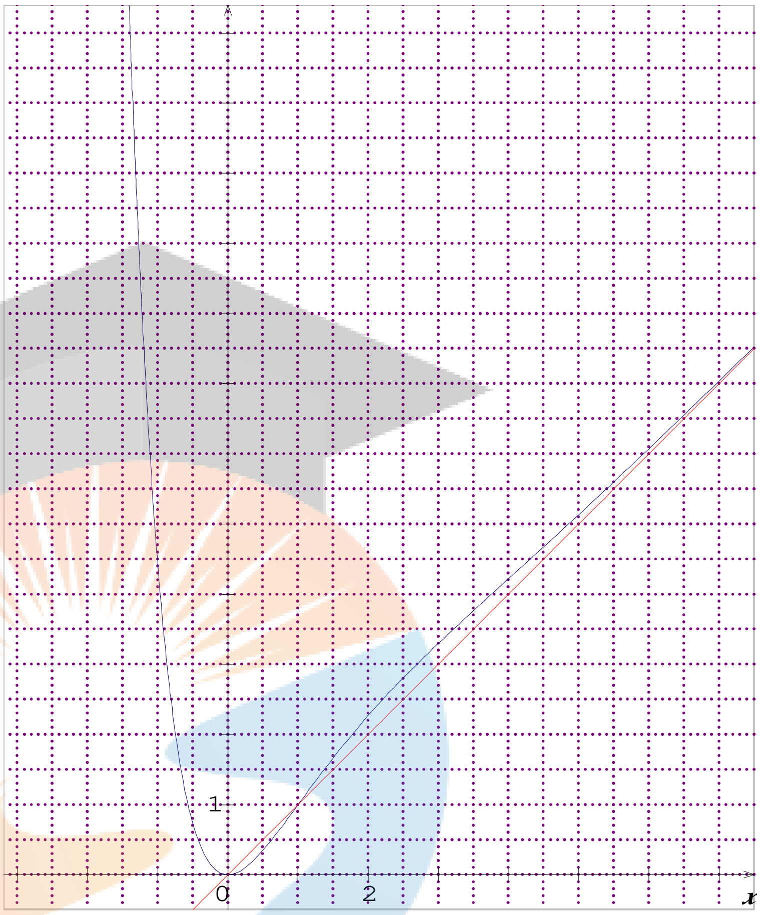
$$\begin{aligned} f''(x)=0 &\Leftrightarrow x^{2}-5x+4=0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ أو } x=4 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

✓ f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 1 إذن (C) نقطة انعطاف أفصولها 1

✓ f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 4 إذن (C) نقطة انعطاف أفصولها 4

و منه المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي هما 1 و 4



6) أ- لنبين أن الدالة $H:x\mapsto\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$

✓ لدينا : $H:x\mapsto\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
H'(x) &= \left(\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}\right)' \\
&= \left(x^2+2x+2\right)'e^{-x}+\left(x^2+2x+2\right)\left(e^{-x}\right)' \\
&= (2x+2)e^{-x}-\left(x^2+2x+2\right)e^{-x} \\
&= \left(2x+2-x^2-2x-2\right)e^{-x} \\
&= -x^2e^{-x} \\
&= h(x)
\end{aligned}$$

إذن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad H'(x)=h(x)$

✓ و منه الدالة $H:x\mapsto\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$

$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx=\int_0^1 -h(x)dx=\left[-H(x)\right]_0^1=\left[-\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}\right]_0^1=\left(\frac{-5}{e}\right)-(-2)=2-\frac{5}{e}=\frac{2e-5}{e}$$

ب-

$$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases} \searrow \begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases} \downarrow$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^{-x}dx &= \left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}dx \\
&= \left(\left(-\frac{1}{e}\right)-(0)\right)-\left[e^{-x}\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right) \\
&= \frac{-2}{e}+1 \\
&= \frac{e-2}{e}
\end{aligned}$$

ج- مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \left|f(x)-x\right|dx\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\| \\
&= \int_0^1 \left(x-f(x)\right)dx\times 1cm\times 1cm \\
&= \int_0^1 \left(-x^2+x\right)e^{-x}dx \\
&= \left(\int_0^1 -x^2e^{-x}dx+\int_0^1 xe^{-x}dx\right)cm^2 \\
&= \left(\left(\frac{5-2e}{e}\right)+\left(\frac{e-2}{e}\right)\right)cm^2 \\
&= \left(\frac{3-e}{e}\right)cm^2
\end{aligned}$$

- لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) لنبين بالترجع : $0\leq u_n\leq 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ من أجل $n=0$:

لدينا : $u_0=\frac{1}{2}$

إذن : $0\leq u_0\leq 1$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

- نفترض أن : $0\leq u_n\leq 1$
- و نبين أن : $0\leq u_{n+1}\leq 1$ ؟

لدينا حسب الإفتراض : $0\leq u_n\leq 1$ و حسب نتيجة *السؤال* $II-3)$ ب- لدينا f تزايدية على $[0,1]$

إذن : $f(0)\leq f(u_n)\leq f(1)$

إذن : $0\leq u_{n+1}\leq 1$

✓ نستنتج أن : $0\leq u_n\leq 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) ليكن $n\in\mathbb{N}$:

لدينا $f(x)-x\leq 0\quad(\forall x\in[0,1])$

و بما أن $0\leq u_n\leq 1$

فإن : $f(u_n)-u_n\leq 0$

و منه $u_{n+1}-u_n\leq 0\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

و بالتالي المتتالية (u_n) تناقصية

3)

✓ بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة (بالعدد 0) فإنها متقاربة

✓ لدينا :

$u_0=\frac{1}{2}\in[0,1]$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

- لدينا : f متصلة على $[0,1]$
- $f([0,1])=[f(0),f(1)]=[0,1]$
- (u_n) متقاربة

إذن نهاية المتتالية (u_n) هي حل للمعادلة : $f(x)=x$

$f(x)=x \;\Leftrightarrow\; x=0$ *أو* $x=1$

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

(u_n) تناقصية فإن $u_n \le u_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

إذن $u_n \le \frac{1}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \le \frac{1}{2}$

و منه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⵓⵍⴰⵏ
ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴼⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2018
-الموضوع-

RS22

الصفحة 1 / 3

★★

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها	المعامل	7

تعليمات عامة

- ✓ يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- ✓ يمكن للمترشح إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ✓ ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة .

مكونات الموضوع

يتكون الموضوع من أربعة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و تتوزع حسب المجالات كما يلي:

التمرين الأول	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الثالث	حساب الاحتمالات	3 نقط
التمرين الرابع	حساب التكامل	نقطتان
المسألة	دراسة دالة عددية و المتتاليات العددية	9 نقطة

$\ln$ يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري .

YOUR WAY طريقكم
جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الأول (3 نقط) :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(2,1,2)$ و شعاعها يساوي 3 والمستوى (P) المار من النقطة $A(-1\,,0,\ 3)$ و $\vec{u}(4\,,0,-3)$ متجهة منظمية عليه.

0.5 (1 بين أن معادلة للفلكة (S) هي : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$

0.5 (2 تحقق من أن معادلة ديكارتية للمستوى (P) هي : $4x-3z+13=0$

0.5 (3 أ- تحقق من أن $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=2+4t\\ y=1\\ z=2-3t\end{cases}$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على (P)

0.5 ب - حدد إحداثيات النقطة H تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (P)

0.25 (4 أ - أحسب $d(\Omega,(P))$

0.75 ب - بين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) في نقطة يتم تحديدها

التمرين الثاني (3 نقط) :

0.75 (1 حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$

(2 في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقطة A التي لحقها $a=\sqrt{2}(1-i)$ و R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$

0.25 أ - أكتب على الشكل المثلثي العدد a

0.5 ب– تحقق من أن لحق النقطة B صورة النقطة A بالدوران R هو $b=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

0.5 (3 أ - نعتبر النقطة C التي لحقها $c=1+i$. بين أن $b^2-c^2=2\sqrt{3}$

0.5 ب - لتكن t الإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$، و النقطة D صورة B بالإزاحة t . بين أن $OD=|b+c|$

0.5 ج– استنتج أن $OD\times BC=2\sqrt{3}$

التمرين الثالث (3 نقط) :

يحتوي صندوق على 12 كرة لا يمكن التمييز بينها باللمس موزعة كما يلي : 3 كرات حمراء تحمل كل واحدة منها العدد 1 و 3 كرات حمراء تحمل كل واحدة منها العدد 2 و 6 كرات خضراء تحمل كل واحدة منها العدد 2

نسحب عشوائيا و تآنيا كرتين من الصندوق ، و نعتبر الأحداث التالية :

A : " الحصول على كرتين تحملان نفس العدد " و B : " الحصول على كرتين مختلفتي اللون "

و C : " الحصول على كرتين تحملان عددين مجموعهما يساوي 3 "

1.5 (1 بين أن $p(A)=\frac{13}{22}$ و $p(B)=\frac{6}{11}$ و احسب $p(C)$

0.5 (2 أ - بين أن $p(A\cap B)=\frac{3}{11}$

0.5 ب – هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل جوابك .

0.5 (3 علما أن الحدث B محقق ، احسب احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس العدد .

التمرين الرابع (نقطتان) :

1) أ- بين أن الدالة $H : x \mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto (x+1)e^x$ على IR 0.5

ب – إستنتج أن $\int_0^1 (x+1)e^x dx = e$ 0.5

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء ، أحسب $\int_0^1 (x^2+2x-1)e^x dx$ 1

المسألة (9 نقطة)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي $g(x) = x^3 - 1 - 2\ln^2 x + 2\ln x$

الجدول جانبه هو جدول تغيرات الدالة g على المجال $]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

1) احسب $g(1)$ 0.25

2) من خلال هذا الجدول حدد إشارة $g(x)$ على كل من $]0,1]$ و $[1,+\infty[$ 0.5

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ- تحقق من أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 0.5

ب- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - \frac{1}{2}$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ 0.5

ج- حدد الوضع النسبي للمستقيم (D) و المنحنى (C) 0.25

2) بين أن $\lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ و أول هندسيا النتيجة. 0.75

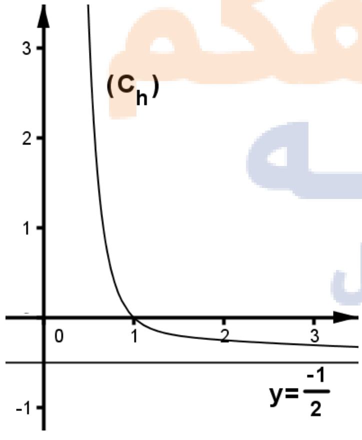
3)أ- بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$ 1

ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $]0\,,1]$ و تزايدية على المجال $[1\,,+\infty[$ 0.5

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$ 0.5

4) أنشئ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (D) و المنحنى (C) (الوحدة : $1\ cm$) 1

III) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $h(x) = f(x) - x$



1) أ - تحقق من أن $h(1) = 0$ 0.25

ب- في الشكل جانبه (C_h) هو التمثيل المبياني للدالة h . حدد إشارة $h(x)$ على كل من $]0\,,1]$ و $[1\,,+\infty[$ ثم استنتج أنه لكل x من المجال $[1\,,+\infty[$ لدينا $f(x) \le x$ 0.75

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$u_0 = e$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من IN

أ- بين بالترجع أن : $1 \le u_n \le e$ لكل n من IN 0.75

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية . *(يمكن استعمال نتيجة السؤال III) 1) ب -)* 0.75

ج – استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها. 0.75

★★

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⵓⵍⴰⵏ
ⴷ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⴳⵍⵍⴰ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات
والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2018
-عناصر الإجابة-

RR22

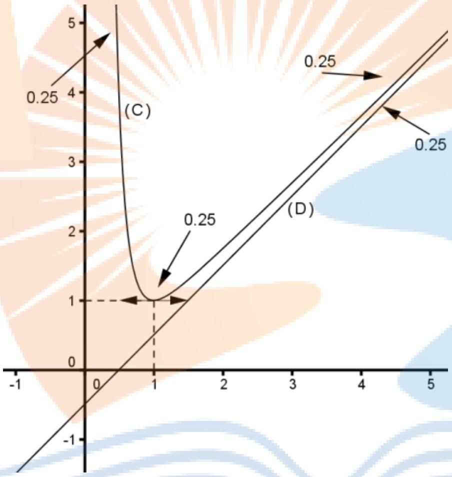
المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها	المعامل	7

تؤخذ بعين الاعتبار مختلف مراحل الحل وتقبل كل طريقة صحيحة تؤدي إلى الحل

التمرين الأول (3 نقط)		
1)	0.5	
2)	0.5	
3)	أ	0.5
	ب	0.5
4)	أ	0.25
	ب	0.25 لتبرير التماس و 0.5 لتحديد نقطة التماس
التمرين الثاني (3 نقط)		
1)	0.25 لحساب المميز و 0.25 لكل حل (و تقبل النتيجة و لو دون اختزال)	
2)	أ	0.25
	ب	0.5
3)	أ	0.5
	ب	0.5
	ج	0.5
التمرين الثالث (3 نقط)		
1)	0.5 لكل احتمال	
2)	أ	0.5
	ب	0.25 ل A و B غير مستقلين و 0.25 للتبرير
3)	0.5	
التمرين الرابع (نقطتان)		
1)	أ	0.5
	ب	0.5
2)	0.5 لتقنية المكاملة بالأجزاء و 0.5 لحساب التكامل	

YOUR WAY
طريقكم للتوجيه
جمعية
وإرشاد شباب المستقبل

المسألة (9 نقط)

I	1		0.25
	2		0.5
II	1	أ	0.5
		ب	0.5
		ج	0.25
	2		0.5 لحساب النهاية و 0.25 للتأويل
	3	أ	1
		ب	0.5
		ج	0.5
	4		انظر الشكل جانبه 
III	1	أ	0.25
		ب	0.5 لتحديد الإشارة و 0.25 للاستنتاج
	2	أ	0.75
		ب	0.75
		ج	0.25 لاستنتاج تقارب المتتالية و 0.5 لحساب النهاية

التمرين الأول (3 نقط):

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1,-1,-1)$ و $B(0,-2,1)$ و $C(1,-2,0)$

0.75 (1 أ) بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

0.5 ب) استنتج أن $x+y+z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

(2 لتكن (S) الفلكة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$

0.75 بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(2,-1,1)$ و أن شعاعها هو $R=\sqrt{5}$

0.5 (3 أ) أحسب $d(\Omega,(ABC))$ مسافة النقطة Ω عن المستوى (ABC)

0.5 ب) استنتج أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) (تحديد مركز وشعاع (Γ) غير مطلوب)

التمرين الثاني (3 نقط) :

0.75 (1 حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$

(2 في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي هي : $a=1-i\sqrt{3}$ و $b=2+2i$ و $c=\sqrt{3}+i$ و $d=-2+2\sqrt{3}$

0.5 أ) تحقق أن $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$

0.25 ب) استنتج أن النقط A و C و D مستقيمية .

(3 ليكن z لحق نقطة M و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{-\pi}{3}$

0.5 تحقق أن $z'=\frac{1}{2}az$

(4 لتكن H صورة النقطة B بالدوران R ، و h لحقها ، و P النقطة التي لحقها p حيث $p=a-c$

0.5 أ) تحقق أن $h=ip$

0.5 ب) بين أن المثلث OHP قائم الزاوية و متساوي الساقين في O

التمرين الثالث (3 نقط) :

يحتوي صندوق على عشر كرات : ثلاث كرات خضراء و ست كرات حمراء و كرة واحدة سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

نسحب عشوائيا و تآنيا ثلاث كرات من الصندوق .

نعتبر الأحداث التالية : **A** : " الحصول على ثلاث كرات خضراء "

و **B** : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

و **C** : " الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون "

2 (1 بين أن : $p(A)=\frac{1}{120}$ و $p(B)=\frac{7}{40}$

1 (2 أحسب $p(C)$

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وارشاد شباب المستقبل

المسألة (11 نقطة) :

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 1cm)

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا — 0.5

2) أ) تحقق أن لكل x من المجال $]0,+\infty[$: $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$ — 0.25

ب) استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ — 0.5

ج) بين لكل x من المجال $]0,+\infty[$: $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ ثم استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ — 0.5

د) بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المقارب المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ — 0.75

3) أ) بين أن لكل x من $]0,1]$: $(x-1)+\ln x\le 0$ و أن لكل x من $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x\ge 0$ — 0.5

ب) بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$ — 1

ج) ضع جدول تغيرات الدالة f — 0.5

4)أ) بين أن $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$ — 0.5

ب) استنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثيتيها — 0.5

5) أ) بين أن لكل x من $]0,+\infty[$ ، $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ و استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) — 0.5

ب) أنشئ (Δ) و (C) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ — 1

6) أ) بين أن الدالة $H:x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto \ln x$ على المجال $]0,+\infty[$ — 0.5

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$ — 0.75

ج) احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ — 0.5

الجزء الثاني :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $I\!N$

1) أ) بين بالترجع أن لكل n من $I\!N$ $1\le u_n\le e$ — 0.5

ب) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية — 0.5

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة — 0.5

2) أحسب نهاية المتتالية (u_n) — 0.75

تصحيح الامتحان الوطني الموحد
للبكالوريا - الدورة العادية 2019
مادة الرياضيات
شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

التمرين الأول:

1-أ) لدينا $\vec{AB}(0-1; -2-(-1); 1-(-1))$

أي $\vec{AB}(-1; -1; 2)$

و $\vec{AC}(1-1; -2-(-1); 0-(-1))$

أي $\vec{AC}(0; -1; 1)$

إذن:

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix}-1&-1\\2&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&0\\2&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-1\times1-(-1)\times2)\vec{i}-(-1\times1-0\times2)\vec{j}+(-1\times(-1)-0\times(-1))\vec{k}$$

$$=1\vec{i}+1\vec{j}+1\vec{k}$$

$$=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

ب- الطريقة الأولى:

نعلم أن المتجهة $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

إذن المستوى (ABC) له معادلة ديكارتية تكتب على الشكل: $1x+1y+1z+d=0$

ولدينا $x_A+y_A+z_A+d=0$

$1-1-1+d=0$

$d=1$

إذن $(ABC): x+y+z+1=0$

الطريقة الثانية:

المستوى (ABC) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $(\vec{AB}\wedge\vec{AC}).\vec{AM}=0$

$(\vec{AB}\wedge\vec{AC}).\vec{AM}=0 \Leftrightarrow 1(x-1)+1(y+1)+1(z+1)=0$

$\Leftrightarrow x-1+y+1+z+1=0$

$\Leftrightarrow x+y+z+1=0$

إذن $x+y+z+1=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

2) الطريقة الأولى

لدينا (S) فلكة معادلتها:

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$$

ولدينا $x^2-4x=(x-2)^2-4$

$y^2+2y=(y+1)^2-1$

$z^2-2z=(z-1)^2-1$

إذن $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y+1)^2-1+(z-1)^2-1+1=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5$

إذن مركز الفلكة هو النقطة: $\Omega(2;-1;1)$

وشعاعها $R=\sqrt{5}$

الطريقة الثانية:

لدينا (S) فلكة معادلتها:

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$$

إذن مركز (S) هو: $\Omega\left(-\frac{(-4)}{2}; -\frac{2}{2}; -\frac{(-2)}{2}\right)$

أي $\Omega(2;-1;1)$

وشعاع (S) هو: $R=\frac{\sqrt{(-4)^2+2^2+(-2)^2-4\times1}}{2}$

$=\frac{\sqrt{20}}{2}=\sqrt{5}$

3) أ- $d(\Omega;(ABC)) = \frac{|x_\Omega+y_\Omega+z_\Omega+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$

$= \frac{|2-1+1+1|}{\sqrt3}$

$= \frac{3}{\sqrt3} = \sqrt3$

ب- لدينا $d(\Omega;(ABC)) < R$

لأن $d(\Omega;(ABC)) = \sqrt3$

و $R = \sqrt5$

إذن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ).

التمرين الثاني.

1) نعتبر المعادلة: $z^2-2z+4=0$

$\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times4$

$= 4-16$

$= -12$

لدينا $\Delta<0$ إذن المعادلة $z^2-2z+4=0$ تقبل حلين عقديين مترافقين:

$z_1 = \frac{2+\sqrt{12}i}{2\times1}$

$= \frac{2+2\sqrt3 i}{2}$

$= \frac{2(1+\sqrt3 i)}{2}$

$= 1+\sqrt3 i$

$z_2 = \overline{z_1} = \overline{1+\sqrt3 i} = 1-\sqrt3 i$

إذن $S = \{1+\sqrt3 i ; 1-\sqrt3 i\}$

2) أ- الطريقة الأولى:

$a-d = 1-i\sqrt3-(-2+2\sqrt3)$

$a-d = 1-i\sqrt3+2-2\sqrt3$

$= 3-2\sqrt3-i\sqrt3$

$= \sqrt3(-\sqrt3+2+i)$ /

$= -\sqrt3(\sqrt3-\sqrt3-\sqrt3+2+i)$

$= -\sqrt3(\sqrt3+i-2\sqrt3+2)$

$= -\sqrt3(\sqrt3+i-(2\sqrt3-2))$

$= -\sqrt3(c-d)$

الطريقة الثانية:

$-\sqrt3(c-d) = -\sqrt3(\sqrt3+i-(-2+2\sqrt3))$

$= -\sqrt3(\sqrt3+i+2-2\sqrt3)$

$= -\sqrt3(2-\sqrt3+i)$

$= -2\sqrt3+3-\sqrt3 i$

$= -2\sqrt3+1+2-\sqrt3 i$

$= 1-\sqrt3 i-(2\sqrt3-2)$

$= a-d$

ب- لدينا $a-d = -\sqrt3(c-d)$

$\frac{a-d}{c-d} = -\sqrt3$

بما أن $\frac{a-d}{c-d} \in \mathbb{R}$

فإن النقط A و C و D مستقيمية

ويمكن إضافة:

لدينا $\frac{a-d}{c-d} = -\sqrt3$

إذن $\arg\left(\frac{a-d}{c-d}\right) = \pi\,[2\pi]$

أي أن $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}) = \pi\,[2\pi]$

إذن $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DC}$ متجهتين مستقيميتين

ومنه النقط A و C و D مستقيمية

طريقكم YOUR WAY توجيه وإرشاد شباب المستقبل

③ لدينا $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

يعني أنه: $\begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

" " $\begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

$\begin{cases} \left|\frac{z'}{z}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

$\frac{z'}{z} = [1; -\frac{\pi}{3}]$

$z' = \left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)z$

$z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

$= \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)z$

$= \frac{1}{2}az$

ويمكن الإجابة على الشكل الآتي:

$R(M) = M' \iff z' = e^{i(-\frac{\pi}{3})}(z - z_O) + z_O$

$\iff z' = \left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)z$

$\iff z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

$\iff z' = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)z$

$\iff z' = \frac{1}{2}az$

(4) أ- لدينا $H(h)$ صورة النقطة $B(b)$ بالدوران R.

إذن $h = \frac{1}{2}ab$

$= \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)(2+2i)$

$= \frac{1}{2}(2+2i-2\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i^2)$

$h = \frac{1}{2}(2+2i-2\sqrt{3}i+2\sqrt{3})$

$= \frac{1}{2}\times 2(1+i-\sqrt{3}i+\sqrt{3})$

$= 1+i-\sqrt{3}i+\sqrt{3}$

$= i\left(\frac{1}{i}+1-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{i}\right)$

$= i(-i+1-\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$

$= i(1-\sqrt{3}i-(\sqrt{3}+i))$

$= i(a-c)$

$= ip$

ب- لدينا $h = ip$

يعني أنه $\frac{h}{p} = i$

أي أن $\frac{h}{p} = [1; \frac{\pi}{2}]$

" $\begin{cases} \left|\frac{h}{p}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{h}{p}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

" $\begin{cases} |h| = |p| \\ \arg\left(\frac{h}{p}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

" $\begin{cases} |h-z_O| = |p-z_O| \\ \arg\left(\frac{h-z_O}{p-z_O}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

" $\begin{cases} OH = OP \\ (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

إذن المثلث OHP قائم الزاوية ومتساوي الساقين في O.

طريقة YOUR WAY لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

التمرين الثالث :

3 (V)
6 (R)
1 (N)

① عدد الكرات داخل الصندوق هو 10
بما أننا نسحب ثلاث كرات تآنيا
فإن $card(\Omega) = C_{10}^{3}$

$= \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}$

$= 120$

A : "الحصول على ثلاث كرات خضراء"

VVV

$card(A) = C_{3}^{3}$

$= 1$

$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

$= \frac{1}{120}$

B : "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون"

RRR أو VVV.

$card(B) = C_{3}^{3} + C_{6}^{3}$

$= 1 + \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$

$= 1 + 20$

$= 21$

$p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)}$

$= \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$

② الطريقة الأولى:

C : "الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون"

RRR أو VVV أو $RR\bar{R}$ أو $VV\bar{V}$

$card(C) = C_{3}^{2}\times C_{7}^{1} + C_{6}^{2}\times C_{4}^{1} + C_{3}^{3} + C_{6}^{3}$

$= \frac{3\times2}{2\times1}\times7 + \frac{6\times5}{2\times1}\times4 + 1 + 20$

$= 3\times7 + 15\times4 + 1 + 20$

$= 21 + 60 + 1 + 20$

$= 102$

$p(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)}$

$= \frac{102}{120}$

$= \frac{17}{20}$

الطريقة الثانية:

الحدث المضاد لـ C.

$\bar{C}$: "الحصول على كرة من كل لون"

أو $\bar{C}$: "الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون مثنى مثنى"

NVR

$p(\bar{C}) = \frac{card(\bar{C})}{card(\Omega)}$

$= \frac{C_{1}^{1}\times C_{3}^{1}\times C_{6}^{1}}{120}$

$= \frac{1\times3\times6}{120}$

$= \frac{18}{120} = \frac{3}{20}$

$p(C) = 1 - p(\bar{C})$

$= 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$

YOUR WAY
طريقك للتوجيه
جمعية ... وإرشاد شباب المستقبل

المسألة: الجزء الأول

1) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

$=0+\frac{1}{2}-(-\infty)+\frac{1}{2}(+\infty)$

$=\frac{1}{2}+\infty+\infty$

$=+\infty$

لأن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$

و $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)^2=+\infty$

إذن (C) يقبل مقاربا عموديا هو المستقيم الذي معادلته $x=0$.

2-أ- لكل x من $]0;+\infty[$

$f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\ln x)^2-\ln x$

$=x+\frac{1}{2}+\ln x\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)$

لأن $(\ln x)^2=\ln x\times\ln x$

أو $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

$=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}\ln x\times\ln x$

$=x+\frac{1}{2}+\ln x\left(-1+\frac{1}{2}\ln x\right)$

$=x+\frac{1}{2}+\ln x\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)$

ب-

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{2}+\ln x\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)$

$=+\infty+\frac{1}{2}+\infty(+\infty-1)$

$=+\infty+\frac{1}{2}+\infty\times(+\infty)$

$=+\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$

ج- لكل x من $]0;+\infty[$ ،

$\frac{(\ln x)^2}{x}=\frac{(\ln\sqrt{x}^2)^2}{\sqrt{x}^2}$

$=\left(\frac{\ln\sqrt{x}^2}{\sqrt{x}}\right)^2$

$=\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

$=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

نضع $t=\sqrt{x}$ $\quad x\to+\infty \Leftrightarrow t\to+\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{t\to+\infty}4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2$

$=4\times 0^2=0$

د- لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2}{x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{2}}{x}-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x}$

$=1-0+\frac{1}{2}\times 0$

$=1$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

طريقكم YOUR WAY
جمعية التوجيه وإرشاد شباب المستقبل

لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x - x$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$$
$$= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}(+\infty)-1\right)(+\infty)$$
$$= +\infty$$

إذن (C) يقبل فرعا شلجميا

بجوار $+\infty$ اتجاهه المقارب المستقيم (Δ)

الذي معادلته $y=x$

3) أ- لدينا

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

و

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

إذن لكل x من $]0;1]$:

$\ln x \leq 0$ و $x-1\leq 0$

$\Rightarrow x-1+\ln x \leq 0$

و لكل x من $[1;+\infty[$

$\ln x \geq 0$ و $x-1\geq 0$

$\Rightarrow x-1+\ln x\geq 0$

ب- لكل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \left(x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)'$$
$$= (x)'+\left(\frac{1}{2}\right)'-(\ln x)'+\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)'$$
$$= 1+0-\frac{1}{x}+\frac{2}{2}(\ln x)'\ln x$$

$$f'(x) = 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\times\ln x$$
$$= 1-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$$
$$= \frac{x-1+\ln x}{x}$$

ج- لدينا $\forall x\in]0;+\infty[: x>0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x-1+\ln x$

على $]0;+\infty[$.

و باستثمار نتيجة السؤال السابق

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(1) = 1+\frac{1}{2}-\ln 1+\frac{1}{2}(\ln 1)^2 = \frac{3}{2}$$

4-أ- لدينا لكل x من $]0;+\infty[$:

$$f''(x) = \left(\frac{x-1+\ln x}{x}\right)'$$
$$= \frac{(x-1+\ln x)'x-(x-1+\ln x)(x)'}{x^2}$$
$$= \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x-(x-1+\ln x)}{x^2}$$
$$= \frac{x+1-x+1-\ln x}{x^2}$$
$$= \frac{2-\ln x}{x^2}$$

ب- لدينا $\forall x\in]0;+\infty[: x^2>0$

إذن اشارة $f''(x)$ هي اشارة $2-\ln x$

على $]0;+\infty[$

$2-\ln x<0 \Leftrightarrow 2<\ln x$	$2-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow 2\geq \ln x$
$\Leftrightarrow e^2<x$	$\Leftrightarrow e^2\geq x$

YOUR WAY
وإرشاد شباب المستقبل

إذن

x	0		e^2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

لدينا $f''(e^2) = 0$ و f'' تتغير إشارتها بجوار e^2

إذن (C) يقبل نقطة انعطاف أفصولها e^2

ولدينا $f(e^2) = e^2 + \frac{1}{2} - \ln e^2 + \frac{1}{2}(\ln e^2)$

$= e^2 + \frac{1}{2} - 2 + 2$

$= e^2 + \frac{1}{2}$

النقطة $A(e^2; e^2 + \frac{1}{2})$ هي نقطة انعطاف لـ (C).

3) أ- لكل x من $]0;+\infty[$:

$f(x) - x = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - x$

$= \frac{1}{2}(1 - 2\ln x + (\ln x)^2)$

$= \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$

لدينا $\forall x \in]0;+\infty[: (\ln x - 1)^2 \geq 0$

إذن لكل x من $]0;+\infty[$: $f(x) - x \geq 0$

ومنه (C) يوجد فوق (Δ) على $]0;+\infty[$.

6) أ- لدينا لكل x من $]0;+\infty[$:

$H'(x) = (x\ln x - x)'$

$= (x)'\ln x + x(\ln x)' - (x)'$

$= \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1$

$= \ln x + 1 - 1$

$H'(x) = \ln x$

$= h(x)$

إذن H دالة أصلية لـ h على $]0;+\infty[$

ب- نحسب التكامل $\int_1^e (\ln x)^2 dx$

باستعمال تقنية المكاملة بالأجزاء نضع:

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = 2(\ln x)'\ln x \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = (\ln x)^2 \end{cases}$$

$= 2 \times \frac{1}{x}\ln x$

$= 2\frac{\ln x}{x}$

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e x \times 2\frac{\ln x}{x} dx$$

$= e(\ln e)^2 - 1(\ln 1)^2 - 2\int_1^e \ln x\, dx$

$= e - 2\left[x\ln x - x\right]_1^e$

$= e - 2(e\ln e - e - (1\ln 1 - 1))$

$= e - 2(e - e + 1)$

$= e - 2$

ج- مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$:

$A = \int_1^e |f(x) - x| dx \ (u.a)$

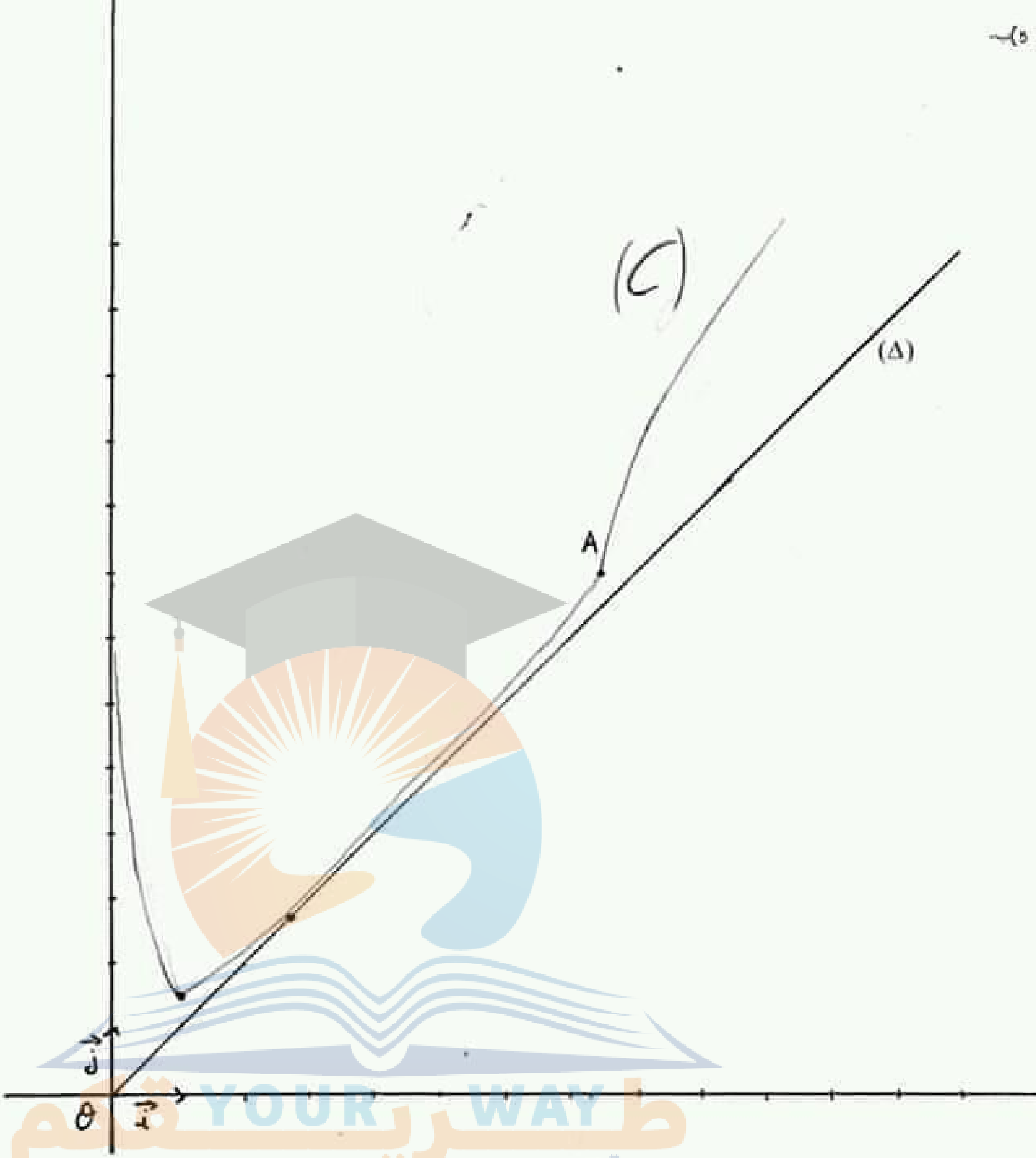
وبما أن $\forall x \in]0;+\infty[: f(x) - x \geq 0$

فإن $A = \int_1^e (f(x) - x) dx \ (u.a)$

لنحسب التكامل $\int_1^e (f(x) - x) dx$

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

-(5



YOUR WAY
جمعية طريقكم لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل

$e^2 \simeq 7{,}38$

$e^2 + \frac{1}{2} \simeq 7{,}88$

$$f(e) = e + \frac{1}{2} - \ln e + \frac{1}{2}(\ln e)^2$$
$$= e + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}$$
$$= e$$

$$\int_1^e (f(x)-x)\,dx = \int_1^e \frac{1}{2}(\ln x-1)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^e \left((\ln x)^2 - 2\ln x + 1\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_1^e (\ln x)^2 dx - 2\int_1^e \ln x\,dx + \int_1^e dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^e (\ln x)^2 dx - \int_1^e \ln x\,dx + \frac{1}{2}\int_1^e dx$$
$$= \frac{1}{2}(e-2) - [x\ln x - x]_1^e + \frac{1}{2}[x]_1^e$$
$$= \frac{1}{2}(e-2) - (e\ln e - e - (1\ln 1 - 1)) + \frac{1}{2}(e-1)$$
$$= \frac{1}{2}(e-2) - (\cancel{e} - \cancel{e} + 1) + \frac{1}{2}(e-1)$$
$$= \frac{1}{2}(e-2+e-1) - 1$$
$$= \frac{1}{2}(2e-3) - 1$$
$$= \frac{1}{2}(2e-3-2)$$
$$= \frac{1}{2}(2e-5)$$

إذن $A = \frac{1}{2}(e-5)\ cm^2$

الجزء الثاني:

1-أ)

من أجل $n=0$: لدينا $u_0 = 1$

إذن $1 \leq u_0 \leq e$

العبارة صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن n من $\mathbb{N}$.

نفترض أن $1 \leq u_n \leq e$

لنبين أن $1 \leq u_{n+1} \leq e$

لدينا f دالة تزايدية على $[1;e]$

و $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$; $x \mapsto -\ln x$; $x \mapsto x + \frac{1}{2}$

دوال متصلة على المجال $[1;e]$

إذن f متصلة على $[1;e]$

لأنها مجموع دوال متصلة

بما أن f دالة متصلة و تزايدية على $[1;e]$ فإن:

$1 \leq u_n \leq e \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$

$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq e$

$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq e$

إذن حسب مبدأ الترجع:

$\forall n \in \mathbb{N}:\ 1 \leq u_n \leq e$

ب- الطريقة الأول:

لدينا لكل n من $\mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

ولدينا $\forall x \in [1;e]:\ f(x) - x \geq 0$

و $\forall n \in \mathbb{N}:\ 1 \leq u_n \leq e$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$:

$f(u_n) - u_n \geq 0$

أي أن $u_{n+1} - u_n \geq 0$

$u_{n+1} \geq u_n$

وبالتالي (u_n) متتالية تزايدية.

الطريقة الثانية.

(u_n) متتالية تزايدية يعني أن:

$\forall n \in \mathbb{N}:\ u_{n+1} \geq u_n$

من أجل $n=0$:

لدينا $u_0 = 1$

و $u_1 = f(u_0)$
$= f(1)$
$= \frac{3}{2}$

YOUR WAY طريقنا لتوعية وإرشاد شباب المستقبل جمعية

إذن $u_1 \geq u_0$ لأن $\frac{3}{2} > 1$

العبارة صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن n من $\mathbb{N}$.

نفترض أن $u_{n+1} \geq u_n$

لنبين أن $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

لدينا f دالة متصلة وتزايدية على $[1;e]$

و $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq e$

إذن $u_{n+1} \geq u_n \Rightarrow f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$

$\Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$

إذن حسب مبدأ الترجع:

$\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} \geq u_n$

ومنه (u_n) متتالية تزايدية.

ج) لدينا (u_n) متتالية تزايدية ومكبورة
$(\forall n \in \mathbb{N} : \; u_n \leq e)$

إذن (u_n) متتالية متقاربة

2) لدينا f دالة متصلة على المجال $[1;e]$

و $f([1;e]) \subset [1;e]$

لأن $f([1;e]) = [f(1); f(e)]$

$= [\frac{3}{2}; e]$

ولدينا $u_0 \in [1;e]$ $(u_0 = 1)$

و (u_n) متتالية متقاربة.

إذن نهاية المتتالية (u_n) هي العدد الحقيقي l حيث l حل للمعادلة

$f(l) = l$.

$f(l) = l \iff f(l) - l = 0$

$\iff \frac{1}{2}(\ln l - 1)^2 = 0$

$\iff (\ln l - 1)^2 = 0$

$\iff \ln l - 1 = 0$

$\iff \ln l = 1$

$\iff e^{\ln l} = e^1$

$\iff l = e$

إذن

$\lim_{n \to +\infty} u_n = e$.

طريقكم YOUR WAY جمعية لتوجيه وإرشاد شباب المستقبل